Предисловие

Содержание школьного курса геометрии не слишком сильно изменилось по сравнению с «Началами» Евклида. Первые главы учебника начинаются с измерения отрезков и углов, потом идёт равенство треугольников, потом возникают различные формулы, связывающие между собой эти длины и углы. Появляются подобие, площади, с ними новые формулы и новые задачи, где одни размеры даны, а другие требуется найти. Фактически идея измерения, числа как важнейшей характеристики геометрических фигур пронизывает всю евклидову геометрию. Длина отрезка, величина угла, отношение отрезков, площадь, объём — всё это числа. Неудивительно, ведь в самом названии $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$, то есть «землемерие», есть корень «метр» — измерять. Вот практическая задача, с которой всё начиналось: точно узнать размер участка земли.

Что останется от элементарной геометрии, если убрать из неё измерения? Что можно сказать о геометрической фигуре, если неизвестны её размеры? Возможно, в голову приходит что-то вроде теоремы о том, что медианы или высоты любого треугольника (независимо от его сторон и углов) пересекаются в одной точке. Но в определении медианы участвует середина стороны. Как определить середину отрезка, не пользуясь понятием длины или отношения? Как определить перпендикулярность прямых, не используя равенства углов? Хочется определить равенство фигур, как в «Началах» Евклида, через наложение: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой». Но как строго определить «наложение» или «совмещение», не используя при этом измерений и числовых величин: длины отрезка или меры угла? Возможно ли это?

На первый взгляд изъять из элементарной геометрии любые измерения невозможно. По крайней мере, в «Началах» нет теорем, не использующих никаких измерений, хотя бы косвенно. Однако на самом деле такие теоремы существуют, хотя сформулировать их совсем не просто. Интересно, как возникла потребность в таких неочевидных утверждениях и зачем нужна геометрия, которая не измеряет ни длин, ни углов (именно эту геометрию и называют проективной).

Можно сказать, что классическая геометрия возникла для решения сугубо экономической задачи: разделить землю на участки. А проективная геометрия появилась как инструмент для решения творческой задачи. В эпоху Возрождения у художников появилась потребность изображать на холсте окружающий мир так, как мы его видим, как говорят — в перспективе.

На первый взгляд основную закономерность перспективного изображения описать несложно: чем дальше предмет от наблюдателя, тем меньше его изображение. В самом деле, представьте себе фотоснимок ряда одинаковых столбов вдоль шоссе. Чем дальше столб, тем меньше он на снимке, хотя в реальности они все одинаковы. А самые дальние столбы вообще сжимаются в точку.

Сначала художники, не мудрствуя лукаво, просто изображали предметы по принципу: чем дальше, тем меньше. Насколько меньше? А как подсказывают глазомер и интуиция. Однако в сложных случаях одной интуиции недостаточно: на глазок правильно изобразить большую комнату с мебелью и многими фигурами людей не выходит. А если на полу выложена мозаика, или хотя бы просто ровная квадратная плитка со сторонами, не параллельными краю картины, что тогда? Надо как-то равномерно сжимать её в глубину, но что значит «равномерно»? Вот тут и возникает геометрия.

В самом деле, на перспективном изображении теряется равенство отрезков и углов, отношения отрезков тоже становятся другими. Даже параллельные прямые начинают сходиться к горизонту, появляется, как говорят художники, «точка схода». Её нет в окружающем нас мире: ведь рельсы не пересекаются. Но на картине они прекрасно пересекаются на линии горизонта. Кстати, а что это за линия? Её ведь тоже нет, она иллюзорна… Как же изображать на картине отсутствующие в природе вещи, добиваясь максимального правдоподобия? И вообще, как устроено правильное перспективное изображение?

Примерно таким был первоначальный вопрос, вызвавший потребность в иной, проективной, геометрии, во многом непохожей на классическую геометрию «Начал». Дальше всё развивалось по схеме, привычной для математики. Исходные потребности быстро исчерпались, а сама теория оказалась гораздо богаче, чем предполагалось. И как евклидова геометрия ушла далеко от своего истока, землемерия, так и проективная геометрия стала полноценным разделом математики, гораздо более глубоким, чем теория перспективы.

Период бурного развития проективной геометрии — XIX век. К началу XX века она уже была стройной законченной теорией.

«Милостивые государи! Между приобретениями, сделанными в области геометрии за последние пятьдесят лет, развитие проективной геометрии занимает своё место». Этими словами в 1872 г. Феликс Клейн начал свою знаменитую лекцию, вошедшую в историю математики как Эрлангенская программа. К этому времени Клейн уже показал, как из наиболее общей проективной геометрии получить и евклидову геометрию, и неевклидову геометрию Лобачевского.

Все важнейшие связи были найдены, все конструкции построены и обоснованы, и тогда проективная геометрия потихоньку перешла в область фундаментальной общеизвестной классики.

Сегодня классическая проективная геометрия находится на «ничьей земле». Замечательно красивые геометрические теоремы с изящными неожиданными чертежами слишком сложны для средней школы, а в университетском курсе на них, как правило, не хватает времени.

Эта книга написана прежде всего для того, чтобы хоть немного закрыть этот пробел и познакомить читателя с важными конструкциями и знаменитыми теоремами проективной геометрии. Для её понимания не требуется никаких специальных знаний сверх обычной школьной геометрии в объёме девяти классов. Книга рассчитана на любознательного старшеклассника или первокурсника, интересующегося геометрией. Опыт автора говорит, что такие ученики ещё встречаются. Некоторые главы написаны по материалам лекций Летней математической школы лицея Л2Ш.

Я благодарен К. В. Козеренко за то, что он убедил меня написать эту книгу, а также за плодотворные обсуждения и помощь во время её написания.