Глава 1

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Основные факты и понятия

Прямая a, пересекающая плоскость α в точке A, *перпендикулярна* плоскости α, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку A.

Пусть точка A не лежит в плоскости α. *Перпендикуляр*, проведённый из точки A к плоскости α, — это отрезок AH, где H — точка плоскости α и прямая AH перпендикулярна плоскости α. Любой другой отрезок AM, где M — точка плоскости α, называют *наклонной*, проведённой из точки A к плоскости α.

Из точки, не лежащей в плоскости, можно провести перпендикуляр к этой плоскости, и притом только один.

Расстояние от точки до плоскости, не проходящей через эту точку, — это длина перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости.

Теорема о трёх перпендикулярах. Из точки A проведены перпендикуляр AH и наклонная AM к плоскости α и через точку M в плоскости α проведена прямая b. Прямые b и AM перпендикулярны тогда и только тогда, когда прямые b и HM перпендикулярны.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая проходит через точку пересечения двух прямых в плоскости α и перпендикулярна им, то она перпендикулярна плоскости α.

Через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, лежат в одной плоскости.

Ортогональная проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости. В случае, когда точка лежит в плоскости, её ортогональная проекция на эту плоскость совпадает с самой точкой.

Ортогональная проекция на плоскость всех точек прямой, не перпендикулярной этой плоскости, — прямая.

Угол между пересекающимися прямыми — это наименьший из четырёх углов, образованных этими прямыми.

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей, — это угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость.

Примеры решения задач

Пример 1. В пространстве дано несколько точек, причём любые четыре из них лежат в одной плоскости. Докажите, что все данные точки лежат в одной плоскости.

Решение. Если все данные точки лежат на одной прямой, то они лежат в одной плоскости. Поэтому будем считать, что не все данные точки лежат на одной прямой. Тогда можно выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, и провести через них плоскость α. Любая из данных точек и три выбранные точки лежат в одной плоскости, поэтому все данные точки лежат в плоскости α.

Пример 2. Найдите множество всех точек, равноудалённых от точек A и B.

Решение. Пусть точка O — середина отрезка AB. Если точка M равноудалена от точек A и B и не совпадает с точкой O, то $MO \perp AB$, поэтому точка M лежит в плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой AB. И наоборот, если точка $M \neq O$ лежит в плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой AB, то $MO \perp AB$, поэтому точка M равноудалена от точек A и B.

Ответ. Плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно прямой AB.

Пример 3. Прямая l проходит через точку A пересечения прямой a и плоскости α, перпендикулярной прямой a. Найдите сумму углов между прямой l и прямой a и между прямой l и плоскостью α.

Решение. Пусть B — произвольная точка прямой l, отличная от A. Проведём из B перпендикуляр BH к плоскости α и перпендикуляр BK к прямой a. Прямые a и BH перпендикулярны плоскости α, поэтому они лежат в одной плоскости и, следовательно, точки A, H, B, K лежат в одной плоскости.

Угол между прямой l и прямой a — это угол KAB, а угол между прямой l и плоскостью α — это угол BAH. Сумма углов KAB и BAH равна прямому углу KAH.

Ответ. 90°.

Задачи для самостоятельного решения

Точки, прямые и плоскости в пространстве

1.1. В пространстве дано несколько плоскостей, причём любые четыре из них имеют общую точку. Докажите, что все плоскости имеют общую точку.

1.2. В пространстве дано несколько прямых, любые две из которых пересекаются и все точки пересечения различны. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

1.3. В пространстве дано несколько прямых, любые две из которых пересекаются, но не все проходят через одну и ту же точку. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

1.4. В пространстве дано несколько прямых, любые две из которых пересекаются. Докажите, что либо все они лежат в одной плоскости, либо все они проходят через одну точку.

1.5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости, прямые AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 пересекаются. Докажите, что точки пересечения этих прямых лежат на одной прямой.

Количество частей

1.6. На сколько частей разделяют пространство четыре плоскости, которые не имеют общей точки и каждые три из которых имеют общую точку?

1.7. На сколько частей разделяют пространство пять плоскостей, каждые три из которых имеют общую точку и никакие четыре не имеют общих точек?

1.8. На сколько частей разделяют пространство n плоскостей, каждые три из которых имеют общую точку и никакие четыре не имеют общих точек?

Геометрические места точек

1.9. Найдите множество точек, равноудалённых от вершин треугольника ABC.

1.10. Найдите множество точек, равноудалённых от прямых OA и OB.

1.11. Найдите множество точек, равноудалённых от трёх прямых OA, OB и OC, не лежащих в одной плоскости.

Угол между прямой и плоскостью

1.12. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что через прямую a можно провести плоскость, перпендикулярную прямой b, тогда и только тогда, когда $a \perp b$.

1.13. Прямые OA и OB перпендикулярны, углы COA и COB равны $60°$. Найдите угол между прямой OC и плоскостью AOB.

1.14. Прямые OA и OB перпендикулярны, угол COA равен $60°$, а угол COB равен $45°$. Найдите угол между прямой OC и плоскостью AOB.

1.15. Из противоположных вершин A и C квадрата $ABCD$ со стороной 1 проведены отрезки $AA_1 = a$ и $CC_1 = a + \frac{1}{a}$, перпендикулярные плоскости квадрата и расположенные по одну сторону от этой плоскости. Докажите, что $A_1C_1 \perp A_1BD$.

1.16. Прямая l пересекает плоскость α и не перпендикулярна ей. Докажите, что угол между прямой l и плоскостью α — это наименьший из углов между прямой l и пересекающей её прямой, расположенной в плоскости α.

1.17. Угол между прямой l и плоскостью α равен φ, угол между прямой l и прямой b, лежащей в плоскости α и пересекающей прямую l, равен ψ, угол между прямой b и ортогональной проекцией прямой l на плоскость α равен β. Докажите, что $\cos\psi = \cos\varphi \cdot \cos\beta$.

Равные углы

1.18. Прямые a, b и c пересекаются в одной точке, прямая c образует равные углы с прямыми a и b. Докажите, что прямая c лежит в одной из двух плоскостей, содержащих биссектрису угла, образованного прямыми a и b, и перпендикулярных плоскости, проходящей через эти прямые.

1.19. Плоскость проходит через точку пересечения прямых a и b и образует с ними равные углы. Докажите, что эта плоскость содержит биссектрису угла, образованного прямыми a и b.

1.20. Точка P равноудалена от прямых AB, BC и CA. Докажите, что ортогональная проекция точки P на плоскость ABC является центром окружности, вписанной в треугольник ABC, или одной из его вневписанных окружностей.

1.21. Три прямые a, b и c, расположенные в плоскости α, пересекаются в точке O. Прямая l проходит через точку O и образует равные углы с прямыми a, b и c. Докажите, что $l \perp \alpha$.

1.22. Три прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O. Сколько прямых, образующих равные углы с этими прямыми, проходит через точку O?

Свойства ортогональной проекции

1.23. Прямая l проходит через точку окружности радиуса R с центром O, расположенной в плоскости α. Ортогональная проекция прямой l на плоскость α касается этой окружности. Найдите расстояние от точки O до прямой l.

1.24. Докажите, что ортогональная проекция прямого угла на плоскость, пересекающую обе стороны угла, — тупой угол.

1.25. Докажите, что ортогональная проекция прямого угла на плоскость, пересекающую одну сторону угла и продолжение другой стороны, — острый угол.

1.26. Ортогональная проекция угла AOB на плоскость, пересекающую обе стороны угла, — прямой угол. Докажите, что угол AOB острый.

1.27. Ортогональная проекция фигуры на каждую из двух пересекающихся плоскостей лежит на некоторой прямой. Обязательно ли сама фигура лежит на некоторой прямой?

1.28. Ортогональные проекции некоторого тела на две пересекающиеся плоскости являются кругами. Докажите, что эти круги равны.

1.29. Отрезок DC перпендикулярен плоскости ABC. Может ли угол ADB быть больше угла ACB?

Расстояние от точки до плоскости

1.30. Расстояния от точек A и B до плоскости равны a и b. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, если точки A и B лежат: а) по одну сторону от плоскости; б) по разные стороны от плоскости.

1.31. Расстояния от вершин треугольника ABC до плоскости α равны a, b и c соответственно, медианы этого треугольника пересекаются в точке M. Найдите расстояние от точки M до плоскости α, если: а) все вершины лежат по одну сторону от плоскости α; б) вершина A лежит по одну сторону от плоскости α, а вершины B и C по другую.

1.32. Плоскость пересекает отрезки AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N. Докажите, что $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$.