Глава 5

Дифференцируемые функции

§ 5.1. Определение производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 — это предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Если этот предел существует, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0.

Для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$, производные в точках a и b определяются как односторонние пределы.

Производную функции $g(x) = f'(x)$ называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$. Аналогично определяется производная третьего порядка $f'''(x)$ и т. д. Производную n-го порядка обозначают $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$.

Теорема 5.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а прямая, проходящая через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, задаётся уравнением $y - y_0 = k(x_1)(x - x_0)$. Тогда*

$$\lim_{x_1 \to x_0} k(x_1) = f'(x_0).$$

Доказательство. Рассматриваемая прямая задаётся уравнением $y - y_0 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, поэтому $k(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Непосредственно из определения производной видно, что $\lim\limits_{x_1 \to x_0} k(x_1) = f'(x_0)$. □

Прямую $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ называют *касательной* к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Теорема 5.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Запишем тождество

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

При этом $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

Пример 5.1. Функция $f(x)=|x|$ всюду непрерывна, но не дифференцируема в точке $x=0$.

Теорема 5.3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то*:

а) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

б) $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$, *где* $(fg)(x)=f(x)g(x)$;

в) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, *если* $g(x_0)\neq 0$.

Доказательство. а) Непосредственно следует из свойств предела суммы двух функций.

б) Пусть $h(x)=f(x)g(x)$. Тогда

$$h(x)-h(x_0)=f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0)).$$

Поделим обе части этого равенства на $x-x_0$ и заметим, что $f(x)\to \to f(x_0)$ при $x\to x_0$.

в) Пусть $h(x)=f(x)/g(x)$. Тогда

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Устремляя x к x_0, получаем требуемое. $\square$

Композицией функций f и g называют функцию $g\circ f(x)=g(f(x))$.

Теорема 5.4. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Предположим, что у точки x_0 есть такая окрестность $U(x_0)$, что если x принадлежит $U(x_0)$ и $x\neq x_0$, то $f(x)\neq f(x_0)$. Тогда функция $g\circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Доказательство. Тождество

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

показывает, что функция $g\circ f$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 5.4 получилось столь простым из-за предположения о том, что у точки x_0 есть такая окрестность $U(x_0)$, что если x принадлежит $U(x_0)$ и $x\neq x_0$, то $f(x)\neq f(x_0)$. В задаче 5.1 это предположение заменено другим.

Задача 5.1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в точке $x \in (a,b)$, а функция g определена на некотором отрезке I, содержащем все значения функции f и дифференцируема в точке $y = f(x)$. Докажите, что функция $h(t) = g(f(t))$ дифференцируема в точке x и $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Пусть функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда каждой точке y отрезка $[f(a), f(b)]$ соответствует единственная точка x отрезка $[a,b]$, для которой $y = f(x)$. Поэтому можно определить *обратную* функцию $g(y) = x$.

Теорема 5.5. *Пусть $f'(x_0) \neq 0$, $g(y)$ — обратная к $f(x)$ функция. Тогда если $y_0 = f(x_0)$, то $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}. \qquad \square$$

§ 5.2. Производные элементарных функций

Вычисление производных элементарных функций мы оставим в качестве задач.

Задача 5.2. Докажите, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого натурального n.

Задача 5.3. Докажите, что $(x^a)' = ax^{a-1}$ для любого вещественного a и положительного x.

Задача 5.4. Докажите, что $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$.

Задача 5.5. Докажите, что $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ на области определения.

Задача 5.6. Докажите, что $(a^x)' = a^x \ln a$ для $a > 0$.

Задача 5.7. Докажите, что $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Задача 5.8. Докажите, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Несложно проверить следующие формулы для производных гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Теперь приведём несколько задач, связанных с применением производных элементарных функций.

Задача 5.9. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и функция $u(x)$ положительна. Докажите, что функция $u^v = u(x)^{v(x)}$ дифференцируема, и найдите её производную.

Задача 5.10. Вычислите производную функции $f(x) = x^{\sin x}$ (для $x > 0$).

Задача 5.11. Пусть $0 < a < \pi/2$ — постоянный угол. Вычислите производную функции $f(x) = \cos^x a - \sin^x a$.

§ 5.3. Производная многочлена и кратные корни

Корень x_0 многочлена $f(x)$ называют *кратным*, если $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$, где $g(x)$ — некоторый многочлен.

Теорема 5.6. *Многочлен $f(x)$ степени $n \geqslant 2$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ и $f'(x)$ имеют общий корень.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$, где $m \geqslant 2$. Тогда многочлен

$$f'(x) = m(x - x_0)^{m-1} g(x) + (x - x_0)^m g'(x)$$

имеет корень x_0.

Предположим, что $f(x) = (x - x_0)g(x)$, причём $g(x_0) \neq 0$. Тогда $f'(x) = g(x) + (x - x_0)g'(x)$, поэтому $f'(x_0) = g(x_0) \neq 0$. Таким образом, если все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1, то они не являются корнями многочлена $f'(x)$. $\square$

Задача 5.12. Докажите, что многочлен

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

Задача 5.13. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что все коэффициенты его n-й производной $P^{(n)}(x)$ делятся на $n!$ для любого натурального n.

Задача 5.14. Докажите, что среднее арифметическое корней многочлена степени n, имеющего n различных корней, равно среднему арифметическому корней его производной.

Задача 5.15. Пусть f и g — многочлены степени n. Докажите, что $fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - f'''g^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n f^{(n)} g$ — константа.

Задача 5.16. Пусть p и q — вещественные числа. Сколько вещественных корней имеет кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ в зависимости от знаков числа p и дискриминанта $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$?

Задача 5.17. Пусть $f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$, где числа $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны и отличны от нуля. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-2; \\ 1 & \text{при } k = n-1. \end{cases}$$

Задача 5.18. Пусть $P(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где $x_1,\ldots,x_n$ — вещественные числа. Докажите, что $(P'(x))^2 \geqslant P(x)P''(x)$ для всех вещественных x.

Задача 5.19. Докажите, что любой многочлен можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

Задача 5.20. Докажите, что многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x^{k_1}+a_2x^{k_2}+\ldots+a_nx^{k_n}$$

имеет не более n положительных корней.

Задача 5.21*. Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей прямой, причём в каждой точке производная некоторого порядка равна нулю. Докажите, что $f(x)$ — многочлен.

§ 5.4. Касательная и нормаль

Касательная в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику $y=f(x)$ дифференцируемой функции задаётся уравнением

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Производная $f'(x_0)$ — это тангенс угла наклона касательной.

Секущая, проходящая через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ задаётся уравнением

$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0),$$

поэтому касательная — предельное положение секущей при $x_1\to x_0$.

Задача 5.22. Касательная к кривой $y=e^x$ в точке (x_0, y_0) пересекает ось Ox в точке $(x_1, 0)$. Докажите, что разность x_1-x_0 одна и та же для всех точек кривой.

Задача 5.23. На параболе, ось которой параллельна оси Oy, взяты точки A_1, A_2 и A_3. Пусть k_1 — тангенс угла наклона касательной в точке A_1, k_{ij} — тангенс угла наклона секущей A_iA_j. Докажите, что $k_1=k_{12}+k_{13}-k_{23}$.

Нормаль к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0) — это прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) перпендикулярно касательной в этой точке.

Задача 5.24. Докажите, что нормаль к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением

$$-f'(x_0)(y-y_0)=x-x_0.$$

Задача 5.25. Нормаль к параболе $y=x^2$ в точке (x_0, y_0) пересекает ось Oy в точке $(0, y_1)$. Докажите, что разность y_1-y_0 постоянна для всех точек параболы.

§ 5.5. Функции, дифференцируемые на отрезке

Значение функции, которое является наибольшим или наименьшим, называют *экстремальным*. Точку, в которой функция принимает экстремальное значение, называют *точкой экстремума*.

Теорема 5.7 (Ферма)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, внутренняя точка x_0 этого отрезка — точка экстремума и в точке x_0 существует производная. Тогда $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех x из отрезка $[a,b]$. Рассмотрим односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

В обоих пределах числитель неотрицателен. При этом в первом пределе знаменатель положителен, а во втором отрицателен. Значит, первый предел неотрицателен, а второй неположителен. Но оба предела равны $f'(x_0)$. □

Историческое замечание. Общий метод нахождения максимумов и минимумов Пьер Ферма (1601–1665) разработал в 1629 году.

Теорема 5.8 (Ролль)**.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причём $f(a)=f(b)$. Тогда существует внутренняя точка x_0 этого отрезка, для которой $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, поэтому по теореме Вейерштрасса (теорема 3.7) среди её значений есть наибольшее M и наименьшее m. Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна, поэтому в качестве x_0 можно взять любую внутреннюю точку отрезка. Если же $M>m$, то одно из этих двух значений достигается не в конце отрезка, потому что по условию $f(a)=f(b)$. Значит, в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения, поэтому по теореме Ферма (теорема 5.7) $f'(x_0)=0$. □

Историческое замечание. Мишель Ролль (1652–1719) опубликовал теорему 5.8 для многочленов в 1691 году. Его подход был чисто алгебраический, он был убеждён, что методы анализа бесконечно малых неизбежно приведут к ошибкам.

Теорема 5.9 (Лагранж)**.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда существует внутренняя точка x_0 этого отрезка, для которой*

$$f'(x_0)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Теорему Лагранжа, записанную в виде $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$, часто называют *формулой конечных приращений* или *теоремой о среднем значении*.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a).$$

Эта функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $F(a) = F(b) = f(a)$. Поэтому к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля (теорема 5.8). В результате получим, что существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, для которой $F'(x_0) = 0$, т. е. $f'(x_0) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0$. □

Историческое замечание. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) получил формулу конечных приращений в 1797 году как частный случай остаточного члена для формулы Тейлора.

Задача 5.26. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f'(x) = 0$ для всех точек x отрезка $[a, b]$. Докажите, что функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.

Задача 5.27. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

а) Докажите, что эта функция неубывающая (на этом отрезке) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ для любой точки $x \in (a, b)$.

б) Докажите, что если $f'(x) \geqslant 0$ для любой точки $x \in (a, b)$ и не существует отрезка $[p, q]$, содержащегося в $[a, b]$, во всех точках которого f' обращается в нуль, то функция $f(x)$ строго возрастающая.

Задача 5.28. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Докажите, что если $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ для любой точки x интервала (a, b), то $f(x) > g(x)$ для любой точки x интервала (a, b).

Задача 5.29. Докажите, что если $x > 0$, то $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

Задача 5.30. Докажите, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$.

Замечание. Доказательства неравенств из задач 5.29 и 5.30 основаны на том, что из неравенства для производных следует неравенство для функций. Другими словами, из неравенства для функций следует неравенство для первообразных (интегралов). Подход с применением интегралов (по сути дела, эквивалентный) в некотором смысле более естествен: чтобы получить неравенство, нужно вычислить интеграл. Поэтому здесь мы привели только два неравенства. Более подробно этот метод доказательства неравенств обсуждается в § 6.13.

Задача 5.31. а) Пусть $0 < \alpha < 1$ и $x \geqslant 0$. Докажите, что $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$.

б) Пусть a, b, p и q — положительные числа, причём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Задача 5.32. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причём $f''(x)>0$ для всех $x\in(a,b)$. Докажите, что эта функция выпуклая.

Задача 5.33. Функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причём для некоторой константы c для всех $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $|f'(x)|\leqslant c|f(x)|$. Докажите, что если $f(x_0)=0$ для некоторой точки $x\in[a,b]$, то $f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$.

Теорема 5.10 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, причём производная $g'(x)$ не обращается в нуль во внутренних точках этого отрезка. Тогда существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a,b]$, для которой*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))-(f(x)-f(a))(g(b)-g(a)).$$

Ясно, что

$$F'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-f'(x)(g(b)-g(a))$$

и $F(a)=F(b)=0$. Поэтому к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля (теорема 5.8). В результате получим, что существует внутренняя точка x_0, для которой

$$(f(b)-f(a))g'(x_0)-f'(x_0)(g(b)-g(a))=0. \tag{5.1}$$

По условию $g'(x_0)\neq 0$. Легко также видеть, что $g(b)-g(a)\neq 0$, поскольку иначе по теореме Ролля нашлась бы внутренняя точка x_1, для которой $g'(x_1)=0$. Поэтому равенство (5.1) можно поделить на $g'(x_0)(g(b)-g(a))$ и получить требуемое. □

§ 5.6. Неравенства

Приведём ещё несколько задач на доказательство неравенств с помощью производных.

Задача 5.34. Докажите, что если $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\alpha\sin\beta<\beta\sin\alpha$ и $\alpha\operatorname{tg}\beta>\beta\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 5.35. Докажите, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha>3\alpha$.

Задача 5.36. а) Докажите, что $e^x>1+x$ для любого $x\neq 0$.

б) Докажите, что $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$ для любого натурального n.

Задача 5.37. Пусть $x>0$, $x\neq 1$. Докажите, что: а) $\ln x<x-1$; б) $\ln x>\frac{x-1}{x}$.

Задача 5.38. Докажите, что $\ln x < n(x^{1/n} - 1) < x^{1/n} \ln x$ для любого положительного числа $x \neq 1$.

Задача 5.39. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = x$ при $x > 0$.

Задача 5.40. Докажите, что $e^x > x^e$ для любого положительного $x \neq e$.

Задача 5.41. Пусть a и b — положительные числа. Докажите, что $b \cdot 2^a + a \cdot 2^{-b} \geqslant a + b$.

Задача 5.42. Пусть $a > b > 0$. Докажите, что

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}.$$

Задача 5.43*. Докажите, что

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx > 0$$

при $0 < x < \pi$.

Задача 5.44. Пусть $0 < x < \pi/4$. Докажите, что

$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x} \quad \text{и} \quad (\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}.$$

Задача 5.45. Докажите, что если $x > -1$ и $x \neq 0$, то

$$\frac{2|x|}{2+x} < |\ln(1+x)| < \frac{|x|}{\sqrt{1+x}}.$$

§ 5.7. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя позволяет вычислять некоторые пределы с помощью производной.

Теорема 5.11 (правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши* (*теорема* 5.10) *и, кроме того, $f(a) = g(a) = 0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Доказательство. Фиксируем точку $x \in (a, b]$ и применим теорему Коши к отрезку $[a, x]$. В результате получим, что внутри этого отрезка есть точка x_1, для которой

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Если $x \to a$, то $x_1 \to a$. Из этого следует требуемое. □

Историческое замечание. Гийом де Лопиталь (1661–1704) привёл правило нахождения пределов функций в своём учебнике анализа, изданном в 1696 году. Но этот учебник составлен на основе лекций, которые ему читал Иоганн Бернулли (1667–1748). В 1692 году Бернулли уже знал это правило.

Задача 5.46. Вычислите с помощью правила Лопиталя предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Задача 5.47. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$.

Задача 5.48. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

Задача 5.49. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, не имеющие общих корней, причём $\deg f<\deg g$ и многочлен $g(x)$ не имеет кратных корней. Докажите, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-a_i},$$

где $a_1,\ldots,a_n$ — корни многочлена g и $A_i=f(a_i)/g'(a_i)$.

§ 5.8. Алгебраические и трансцендентные функции

Функцию $f(x)$ называют *алгебраической*, если существуют многочлены $P_0(x),\ldots,P_n(x)$, для которых

$$P_0(x)(f(x))^n+P_1(x)(f(x))^{n-1}+\ldots+P_n(x)=0,$$

причём многочлен $P_0(x)$ не равен тождественно нулю. В противном случае функцию $f(x)$ называют *трансцендентной*.

Задача 5.50. Докажите, что функция $f(x)=\sin x$ трансцендентная.

Задача 5.51. Докажите, что функция $f(x)=e^x$ трансцендентная.

§ 5.9. Формула Тейлора

Проще всего формула Тейлора выглядит для многочленов; сформулируем соответствующее утверждение в виде задачи.

Задача 5.52. а) Пусть a — фиксированное число. Докажите, что любой многочлен $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ можно записать в виде

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_n(x-a)^n,$$

где $A_0,A_1,\ldots,A_n$ — константы.

б) Докажите, что $A_0=f(a)$, $A_1=f'(a)$, $A_2=\dfrac{f''(a)}{2!}$, …, $A_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Теорема 5.12 (формула Тейлора). *Пусть a — фиксированное число, $f(x)$ — функция, имеющая производные до порядка $n+1$ включительно для любого x между a и b (для некоторого b). Тогда если число x заключено между a и b и*

$$T(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

то

$$f(x) - T(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

для некоторого θ между a и x.

Доказательство. Ясно, что $T(a) = f(a)$. Далее,

$$\begin{aligned}
T'(x) &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},\\
T''(x) &= f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a),\\
T^{(n+1)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Поэтому $T'(a)=f'(a)$, $T''(a)=f''(a)$, ..., $T^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$ и $T^{(n+1)}(x)=$ $=0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - T(x)$. Для неё $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots = \varphi^{(n)}(a) = 0$ и $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Рассмотрим ещё вспомогательную функцию $\psi(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Для неё $\psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \ldots = \psi^{(n)}(a) = 0$ и $\psi^{(n+1)}(x) = 1$. Более того, ни сама функция ψ, ни её производные до $(n+1)$-й включительно не обращаются в нуль в точках, отличных от a.

Фиксируем точку $x \neq a$. Из равенств $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ следует, что $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}$. Поэтому по теореме Коши (теорема 5.10) существует точка x_1 между a и x, для которой $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$. Из равенств $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$ следует, что $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(a)}{\psi'(x)-\psi'(a)}$. Поэтому по теореме Коши существует точка x_2 между a и x_1 (а значит, между a и x), для которой $\dfrac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \dfrac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}$. Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} = \ldots = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

где точка x_{n+1} лежит между a и x.

Напомним, что $\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x)=1$. Пусть $\theta=x_{n+1}$. Тогда $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = f^{(n+1)}(\theta)$,т. е. $f(x) - T(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. $\square$

Многочлен $T(x)$ называют *многочленом Тейлора* порядка n функции f в точке a.

Разность $f(x) - T(x)$ называют *остаточным членом*. Остаточный член вида $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ называют *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Историческое замечание. Брук Тейлор (1685–1731) пришёл к представлению функций с помощью формулы Тейлора в 1715 году. Но Джеймс Грегори (1638–1675) уже знал эту формулу в 1671 году и получил разложения нескольких важных функций. Лагранж получил остаточный член в формуле Тейлора в 1797 году. Он первым оценил точность приближения функции суммой конечного числа членов ряда Тейлора.

Задача 5.53. а) Докажите, что модуль разности между $\sin x$ и

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

не превосходит $\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

б) Докажите, что модуль разности между $\cos x$ и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

не превосходит $\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

в) Докажите, что модуль разности между e^x и

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не превосходит $e^x \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Замечание. Приводимые в задаче 5.53 следствия из формулы Тейлора можно получить и более простыми средствами. По этому поводу см. § 6.13.

Историческое замечание. Формулы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{и} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

предложил Исаак Ньютон (1643–1727) в 1669 году.

Задача 5.54. Докажите, что если $(n+1)$-я производная функции f тождественно равна нулю, то f — многочлен степени не выше n.

§ 5.10. Равномерная сходимость дифференцируемых функций

Начнём с двух задач.

Задача 5.55. Докажите, что поточечно сходящаяся последовательность функций, дифференцируемых на отрезке, может сходится к не дифференцируемой функции.

Задача 5.56. Пусть последовательность дифференцируемых функций f_n сходится на отрезке к дифференцируемой функции f. Докажите, что при этом последовательность $\{f_n'\}$ может не сходиться к f'.

Но при определённых условиях последовательность дифференцируемых функций сходится к дифференцируемой функции и при этом последовательность производных сходится к производной.

Теорема 5.13. *Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций f_n на интервале (a,b) сходится в некоторой точке x_0, а последовательность их производных f_n' равномерно сходится на этом интервале, то последовательность функций f_n равномерно сходится на интервале к непрерывно дифференцируемой функции f, причём $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f'(x)$ для всех $x\in(a,b)$.*

Доказательство. Фиксируем точку $c\in(a,b)$ и положим $g_n(x)=$ $=f_n'(c)$ при $x=c$ и $g_n(x)=\dfrac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}$ при $x\neq c$. Тогда

$$f_n(x)=f_n(c)+(x-c)g_n(x) \tag{5.2}$$

для всех $x\in(a,b)$. Покажем, что для любого c последовательность $\{g_n\}$ сходится равномерно на интервале (a,b). Пусть задано $\varepsilon>0$. Согласно теореме о среднем значении (теорема 5.9) для точки $x\in$ $\in(a,b)$, $x\neq c$, можно выбрать точку ξ между x и c так, что

$$g_n(x)-g_m(x)=\frac{f_n(x)-f_m(x)-(f_n(c)-f_m(c))}{x-c}=f_n'(\xi)-f_m'(\xi).$$

Последовательность $\{f_n'\}$ сходится равномерно на (a,b), поэтому можно выбрать N так, что если $n,m\geqslant N$, то $|g_n(x)-g_m(x)|<\varepsilon$. Для $x=c$ это неравенство тоже выполняется, поскольку $g_n(c)=f_n'(c)$. Равномерная сходимость последовательности $\{g_n\}$ доказана.

Докажем теперь, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на интервале (a,b). Запишем равенство (5.2) для $c=x_0$:

$$f_n(x)=f_n(x_0)+(x-x_0)g_n(x).$$

Из этого равенства следует равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$, поскольку последовательность чисел $\{f_n(x_0)\}$ сходится (по условию) и последовательность функций $\{g_n\}$ сходится равномерно.

Снова фиксируем точку $c \in (a, b)$ и положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$. Требуется доказать, что

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} f_n'(c). \tag{5.3}$$

Последовательность $\{g_n\}$ сходится равномерно, и каждая функция g_n непрерывна в точке c, поэтому функция g непрерывна в точке c. Кроме того, $g_n(c) = f_n'(c)$. Следовательно, правую часть равенства (5.3) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = g(c) = \lim_{x\to c} g(x).$$

Ясно также, что

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

Поэтому левую часть равенства (5.3) можно записать в следующем виде:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} g(x).$$ □

§ 5.11. Промежуточные значения производной

Производная всюду дифференцируемой функции может не быть непрерывной. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{1}{x}\right)' \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Для вычисления производной в нуле можно воспользоваться непосредственно определением производной. Ясно, что $\left|\frac{f(t) - f(0)}{t - 0}\right| = \left|t \sin \frac{1}{t}\right| \leqslant |t|$ при $t \neq 0$, поэтому $f'(0) = 0$. Таким образом, функция $f'(x)$ всюду определена, но в точке 0 она не непрерывна, поскольку функция $\cos \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Тем не менее, производная функции, дифференцируемой на отрезке, принимает все промежуточные значения.

Теорема 5.14 (Дарбу)**.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Тогда $f'(x) = \lambda$ для некоторой точки $x \in (a, b)$.*

Аналогичное утверждение верно и в том случае, когда $f'(a) > f'(b)$.

Доказательство. Пусть точка c — середина отрезка $[a,b]$. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ две непрерывные кусочно линейные функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$: если $a \leqslant t \leqslant c$, то $\alpha(t) = a$ и $\beta(t) = 2t - a$, а если $c \leqslant t \leqslant b$, то $\alpha(t) = 2t - b$ и $\beta(t) = b$ (рис. 5.1). Ясно, что при $a < t < b$

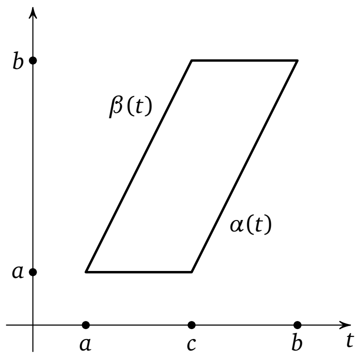

Рис. 5.1.

выполняются неравенства $a \leqslant \alpha(t) < \beta(t) \leqslant b$. Поэтому можно рассмотреть непрерывную функцию

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

на интервале (a,b). Ясно, что $g(t) \to f'(a)$ при $t \to a$ и $g(t) \to f'(b)$ при $t \to b$. Поэтому функцию $g(t)$ можно доопределить до функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$, и из теоремы о промежуточном значении (теорема 3.5) следует, что на интервале (a,b) существует точка t_0, для которой $g(t_0) = \lambda$, т. е.

$$\frac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = \lambda.$$

Поэтому по формуле конечных приращений (теорема 5.9) существует точка $x \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$, для которой $f'(x) = \lambda$. □

Историческое замечание. Гастон Дарбу (1842–1917) доказал теорему 5.14 в 1875 году.

§ 5.12. Многочлены Чебышёва

Определение многочленов Чебышёва основано на том, что $\cos n\varphi$ полиномиально выражается через $\cos\varphi$, т. е. существует такой многочлен $T_n(x)$, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$. В самом деле, можно положить $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$, а затем воспользоваться формулой

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi.$$

Эта формула показывает, что многочлены $T_n(x)$, определённые при $n \geqslant 1$ рекуррентным соотношением

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

обладают требуемым свойством. Эти многочлены $T_n(x)$ называют *многочленами Чебышёва*.

Непосредственно из того, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$, следует, что $|T_n(x)| \leqslant 1$ при $x \leqslant 1$. А из рекуррентного соотношения следует, что $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа.

Наиболее важное свойство многочленов Чебышёва заключается в том, что многочлен $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ — наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Это свойство тесно связано с другим важным свойством многочленов Чебышёва: $T_n(\cos(k\pi/n)) = \cos k\pi = (-1)^k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, т. е. все локальные максимумы функции T_n равны 1, все локальные минимумы равны -1, и общее количество локальных максимумов и минимумов равно $n+1$.

Теорема 5.15. *Пусть* $P_n(x) = x^n + \ldots$ — *многочлен степени* n *со старшим коэффициентом* 1, *причём* $|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ *при* $|x| \leqslant 1$. *Тогда* $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - P_n(x)$. Его степень не превосходит $n-1$, поскольку старшие члены многочленов $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ и $P_n(x)$ равны. Из того, что $|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ при $|x| \leqslant 1$, следует, что в точке $x_k = \cos(k\pi/n)$ либо $Q(x_k) = 0$, либо знак числа $Q(x_k)$ совпадает со знаком числа $T_n(x_k)$.

Предположим сначала, что $Q(x_k) \neq 0$ для всех k. В таком случае в концах каждого отрезка $[x_{k+1}, x_k]$ многочлен $Q(x)$ принимает значения разного знака, поэтому у многочлена $Q(x)$ на этом отрезке есть корень. Количество отрезков $[x_{k+1}, x_k]$ равно n, поэтому многочлен $Q(x)$ имеет по крайней мере n корней. Для многочлена степени не более $n-1$ это означает, что он тождественно равен нулю, т. е. $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

Предположим теперь, что $Q(x_k) = 0$ для некоторого k. В этом случае либо x_k — кратный корень многочлена Q, либо в окрестности точки x_k многочлен Q принимает как положительные, так и отрицательные значения. Во втором случае заменим точку x_k на близкую к ней точку x'_k, для которой знак числа $Q(x'_k)$ такой же, как у числа $(-1)^k$. Мы снова получаем n отрезков, каждому из которых соответствует по крайней мере один корень многочлена Q. Действительно: либо хотя бы в одном из концов отрезка расположен кратный корень многочлена Q, либо в концах отрезка многочлен Q принимает значения разных знаков. В первом случае каждому из отрезков с концом в кратном корне можно сопоставить свой корень многочлена Q. ☐

Историческое замечание. Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) ввёл многочлены Чебышёва и доказал теорему 5.15 в 1854 году.

§ 5.13. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита

Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — попарно различные точки прямой. Тогда существует ровно один многочлен $P(x)$ степени не выше n, принимающий в точке x_i заданное значение a_i. Действительно, единственность многочлена P следует из того, что разность двух таких многочленов обращается в нуль в точках $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и имеет при этом степень не выше n. Ясно также, что следующий многочлен обладает всеми требуемыми свойствами:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})} = \\ = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$$

где $\omega(x) = (x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1})$. Этот многочлен $P(x)$ называют *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные точки прямой, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — натуральные числа, сумма которых равна $m+1$. Предположим, что в каждой точке x_i заданы числа $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(\alpha_i-1)}$. Тогда существует единственный многочлен $H_m(x)$ степени не выше m, для которого выполняются равенства

$$H_m(x_i) = y_i^{(0)}, H'_m(x_i) = y_i^{(1)}, \ldots, H_m^{(\alpha_i-1)}(x_i) = y_i^{(\alpha_i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Иными словами, в точке x_i многочлен H_m имеет заданные значения производных до порядка $\alpha_i - 1$ включительно. Такой многочлен H_m называют *интерполяционным многочленом Эрмита*.

Единственность интерполяционного многочлена Эрмита достаточно очевидна. Действительно, если $G(x)$ — разность двух интерполяционных многочленов Эрмита, то $\deg G \leqslant m$ и $G(x)$ делится на $(x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^{\alpha_n}$.

Пусть $\Omega(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^{\alpha_n}$. Чтобы построить интерполяционный многочлен Эрмита, достаточно указать многочлены $\varphi_{ik}(x)$ ($i = 1, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1$), обладающие следующими свойствами:

1) $\deg \varphi_{ik} \leqslant m$;

2) $\varphi_{ik}(x)$ делится на многочлен $\Omega(x)/(x-x_i)^{\alpha_i}$, т. е. $\varphi_{ik}(x)$ делится на $(x-x_j)^{\alpha_j}$ при $j \neq i$;

3) разложение $\varphi_{ik}(x)$ по степеням $(x-x_i)$ начинается с

$$\frac{1}{k!}(x-x_i)^k + c(x-x_i)^{\alpha_i}.$$

Действительно, $\varphi_{ik}^{(0)}(x_j) = \ldots = \varphi_{ik}^{(\alpha_i-1)}(x_j) = 0$ при $j \neq i$, $\varphi_{ik}^{(k)}(x_i) = 1$ и $\varphi_{ik}^{(l)}(x_i) = 0$ при $0 \leqslant l \leqslant \alpha_i - 1$, $l \neq k$. Поэтому можно положить

$$H_m(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(k)} \varphi_{ik}(x).$$

Выберем проколотую окрестность точки x_i, в которой нет точек $x_1, \ldots, x_n$, и в этой окрестности рассмотрим многочлен Тейлора порядка $\alpha_i - k - 1$ функции $\frac{1}{k!} \cdot \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}$ в точке x_i. Обозначим этот многочлен $l_{ik}(x)$. Несложно проверить, что многочлен

$$\varphi_{ik}(x) = \frac{\Omega}{(x-x_i)^{\alpha_i}}(l_{ik}(x)(x-x_i)^k)$$

обладает всеми требуемыми свойствами. Свойства 1 и 2 очевидны, а свойство 3 доказывается следующим образом:

$$\varphi_{ik}(x) = \frac{l_{ik}(x)(x-x_i)^k}{k!\, l_{ik}(x) + a(x-x_i)^{\alpha_i-k} + \ldots} = \frac{(x-x_i)^k}{k!}(1 + b(x-x_i)^{\alpha_i-k} + \ldots).$$

Записывая в явном виде многочлен Тейлора $l_{ik}(x)$, получаем

$$H_m(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \sum_{s=0}^{\alpha_i-k-1} y_i^{(k)} \frac{1}{k!} \frac{1}{s!} \left(\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right)^{(s)}_{x=x_i} \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-k-s}}.$$

Историческое замечание. Лагранж опубликовал формулу интерполяционного многочлена в 1795 году. Шарль Эрмит (1822–1901) обобщил интерполяционный многочлен Лагранжа в 1878 году.

§ 5.14. Формула Фаа-ди-Бруно

Формула Фаа-ди-Бруно — это обобщение формулы производной сложной функции на производные высшего порядка. У этой формулы есть разные записи. Мы приведём только комбинаторную запись. Отметим, что наше доказательство следует [Joh2].

Теорема 5.16 (Фаа-ди-Бруно). *Пусть функции f и g дифференцируемы достаточно много раз. Тогда*

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t))=\sum\frac{m!}{b_1!\,b_2!\ldots b_m!}g^{(k)}(f(t))\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2}\ldots\left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m},$$

где суммирование ведётся по всем наборам целых неотрицательных чисел $b_1,\ldots,b_m$, для которых $b_1+2b_2+\ldots+mb_m=m$; при этом $k=b_1+\ldots+b_m$.

Доказательство. Ясно, что $(g(f(t)))'=g'(f(t))f'(t)$ и $(g(f(t)))''=$ $=g'(f(t))f''(t)+g''(f(t))(f'(t))^2$. Предположим, что $(g(f(t)))^{(m)}$ является суммой слагаемых вида

$$g^{(k)}(f(t))(f'(t))^{b_1}\ldots(f^{(m)}(t))^{b_m}, \tag{5.4}$$

где $b_1+2b_2+\ldots+mb_m=m$ и $b_1+\ldots+b_m=k$. Производная функции (5.4) равна

$$g^{(k+1)}(f(t))(f'(t))^{b_1+1}\ldots(f^{(m)}(t))^{b_m}+g^{(k)}(f(t))((f'(t))^{b_1}\ldots(f^{(m)}(t))^{b_m})'.$$

Во второе слагаемое входит производная m множителей, эту производную можно представить в виде суммы m слагаемых; при этом

$$((f^{(i)}(t))^{b_i})'=b_i(f^{(i)}(t))^{b_i-1}f^{(i+1)}(t),$$

т. е. b_i заменяется на b_i-1, а b_{i+1} заменяется на $b_{i+1}+1$. Ясно также, что $b_1+2b_2+\ldots+i(b_i-1)+(i+1)(b_{i+1}+1)+\ldots=m+1$ и $b_1+\ldots+(b_i-1)+(b_{i+1}+1)+\ldots=k$. Таким образом, $(g(f(t)))^{(m+1)}$ тоже является суммой слагаемых такого же вида (только с заменой m на $m+1$).

Доказываемая формула имеет комбинаторный смысл. Чтобы прояснить его, сопоставим разбиению чисел от 1 до m на блоки выражение вида (5.4) следующим образом: количество блоков — это порядок производной функции g, а каждому блоку из b чисел сопоставляется множитель $f^{(b)}(t)$. Например, разбиению $\{1,2,3\}$ сопоставляется $g'(f(t))f'''(t)$, каждому из разбиений $\{1,2\},\{3\}$; $\{1,3\},\{2\}$ и $\{2,3\},\{1\}$ сопоставляется $g''(f(t))f'(t)f''(t)$, а разбиению $\{1\},\{2\}$, $\{3\}$ сопоставляется $g'''(f(t))(f'(t))^3$.

Это сопоставление позволяет доказать, что

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum g^{(k)}(f(t))(f'(t))^{b_1}(f''(t))^{b_2}\dots(f^{(m)}(t))^{b_m},$$

где суммирование ведётся по всем разбиениям чисел от 1 до m на блоки, причём для каждого разбиения число k — это количество блоков, а b_i — это количество блоков, содержащих ровно i чисел.

Действительно, применим индукцию по m. Каждое разбиение чисел от 1 до $m+1$ единственным образом получается из разбиения чисел от 1 до m присоединением числа $m+1$. Если мы присоединяем $m+1$ в качестве отдельного блока, то общее количество блоков увеличивается на 1 и количество блоков, содержащих ровно одно число, увеличивается на 1. Это соответствует применению дифференцирования к $g^{(k)}(f(t))$, в результате чего получается $g^{(k+1)}(f(t))f'(t)$. Если же мы добавляем $m+1$ к уже существующему блоку, состоящему из i чисел, то количество блоков такого размера уменьшается на 1, а количество блоков размера $i+1$ увеличивается на 1; такая операция применяется к любому из b_i блоков. Это в точности соответствует применению дифференцирования к $(f^{(i)}(t))^{b_i}$, в результате чего получается $b_i(f^{(i)}(t))^{b_i-1}f^{(i+1)}(t)$; в самом деле, количество блоков длины i становится равным $b_i - 1$ (множитель $(f^{(i)}(t))^{b_i-1}$) и добавляется один блок длины $i+1$ (множитель $f^{(i+1)}(t)$).

Остаётся доказать, что количество разбиений числа m на b_1 блоков длины 1, b_2 блоков длины 2 и т. д. равно

$$\frac{m!}{(1!)^{b_1}\dots(m!)^{b_m}\, b_1!\dots b_m!}.$$

Рассмотрим $m!$ перестановок чисел от 1 до m. Каждой такой перестановке можно сопоставить разбиение на блоки: сначала идут b_1 блоков длины 1, потом b_2 блоков длины 2 и т. д. Но при этом в каждом из b_i блоков длины i числа можно переставлять, от этого разбиение на блоки не изменяется; это соответствует множителю $(i!)^{b_i}$ в знаменателе. Кроме того, сами b_i блоков длины i тоже можно переставлять; это соответствует множителю $b_i!$ в знаменателе. □

Историческое замечание. Франческо Фаа-ди-Бруно (1825–1888) получил формулу для высших производных сложной функции в виде определителя в 1855 году. Но первым такую формулу опубликовал Луи Арбогаст (1759–1803) в 1800 году.

§ 5.15. Решения задач

5.1. По определению производной

$$f(t)-f(x)=(t-x)(f'(x)+u(t)),$$
$$g(s)-g(y)=(s-y)(g'(y)+v(s)),$$

где $t\in[a,b]$, $s\in I$ и $u(t)\to 0$ при $t\to x$, $v(s)\to 0$ при $s\to y$. Пусть $s=f(t)$. Тогда

$$h(t)-h(x)=g(f(t))-g(f(x))=(f(t)-f(x))\cdot(g'(y)+v(s))=$$
$$=(t-x)\cdot(f'(x)+u(t))\cdot(g'(y)+v(s)).$$

При $t\neq x$ получаем

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=(g'(y)+v(s))\cdot(f'(x)+u(t)).$$

Правая часть стремится к $g'(y)f'(x)$ при $t\to x$, поскольку из непрерывности функции f следует, что $s\to y$ при $t\to x$.

5.2. Ясно, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}.$$

При $x\to x_0$ каждое из n слагаемых стремится к x_0^{n-1}.

5.3. Легко проверить, что

$$\frac{x^a-x_0^a}{x-x_0}=x_0^a\frac{\left(\dfrac{x^a}{x_0^a}\right)-1}{x-x_0}=x_0^{a-1}\frac{(1+y)^a-1}{y},$$

где $y=\dfrac{x-x_0}{x_0}$. Ясно, что $y\to 0$ при $x\to x_0$. Кроме того, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(1+y)^a-1}{y}=$ $=a$ (задача 3.31).

5.4. Ясно, что

$$\sin x-\sin x_0=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2},$$
$$\cos x-\cos x_0=-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}.$$

Остаётся заметить, что $\dfrac{1}{x-x_0}\sin\dfrac{x-x_0}{2}\to\dfrac{1}{2}$ при $x\to x_0$ (задача 3.6) и функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны (задача 3.5).

5.5. Согласно теореме 5.3 (п. в)

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для $(\operatorname{ctg} x)'$ вычисления аналогичны.