Глава 22

Арифметическая прогрессия

Основные факты и понятия

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называют *арифметической прогрессией*, если для всех натуральных n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое постоянное число, называемое *разностью арифметической прогрессии*. Для конечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ такое равенство должно выполняться для всех натуральных $n < m$. Число m при этом называют *длиной* арифметической прогрессии.

Условие, что разность $d = a_{n+1} - a_n$ постоянна, можно записать следующим образом: $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Это означает, что каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних с ним членов. И наоборот: если каждый член последовательности равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то такая последовательность — арифметическая прогрессия.

Для n-го члена арифметической прогрессии справедлива формула $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}.$$

Свойства арифметической прогрессии

22.1. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что отношение большей стороны к меньшей меньше 3.

22.2. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?

22.3. Положительные числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ тоже образуют арифметическую прогрессию.

22.4. Докажите, что для конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, все члены которой отличны от нуля, выполняется равенство
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

22.5. Докажите, что для конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ с разностью $d \neq 0$, все члены которой отличны от нуля, выполняется равенство
$$\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{n-1}a_n}\right).$$

22.6. Докажите, что для конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, все члены которой положительны, выполняется равенство
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

22.7. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

22.8. Первый член и разность арифметической прогрессии — натуральные числа. Докажите, что если один из членов этой прогрессии — полный квадрат, то среди членов этой прогрессии бесконечно много полных квадратов.

22.9. Число p простое, целые числа a_1, a_2, ..., a_p образуют возрастающую арифметическую прогрессию, и ни одно из них не делится на p. Докажите, что разность этой прогрессии делится на p.

22.10. Докажите, что в бесконечной арифметической прогрессии 1, $1+n$, $1+2n$, ..., где n — натуральное число, встречается куб натурального числа.

22.11. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, найдутся два члена с одинаковой суммой цифр.

Сумма арифметической прогрессии

22.12. Найдите сумму первых $2n-1$ членов арифметической прогрессии, если известен её член a_n.

22.13. Для каких n сумма $1+2+3+\ldots+n$ делится на n?

22.14. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n также степень двойки.

22.15. Для некоторого $n \neq m$ сумма первых n членов арифметической прогрессии равна сумме первых m членов. Найдите сумму первых $n+m$ членов.

22.16. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна S_n, сумма первых m членов равна S_m $(m \neq n)$. Найдите сумму первых $n+m$ членов.

22.17. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, делящихся на 30.

22.18. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

22.19. Докажите, что любое число вида n^k, где n и k — натуральные числа, отличные от 1, можно представить в виде суммы n последовательных нечётных чисел.

22.20. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

22.21. Найдите $2n+1$ последовательных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма квадратов первых $n+1$ чисел равна сумме квадратов последних n чисел.

22.22. Число N составлено из всех последовательностей из n цифр 000…00, 000…01, …, 999…99, записанных в произвольном порядке. Докажите, что N делится на 999…99 (n девяток).

22.23. Пусть $a_1 = a > 0$ и $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{1+ka_k}$ при $k \geqslant 1$. Вычислите a_n.

Арифметическая прогрессия и квадратный трёхчлен

22.24. Для арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d укажите квадратный трёхчлен $f(x)$, обладающий следующим свойством: $f(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ для всех натуральных n.

22.25. Докажите, что для любого квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx$ последовательность $a_n = f(n) - f(n-1)$ — арифметическая прогрессия. Найдите первый член a_1 и разность d этой прогрессии.

22.26. а) Найдите квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx$, для которого $f(n) - f(n-1) = n$ для всех натуральных n.

б) С помощью этого трёхчлена выведите формулу суммы

$$1 + 2 + \ldots + n.$$

22.27. а) Найдите кубический многочлен $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, для которого $f(n) - f(n-1) = n^2$ для всех натуральных n.

б) С помощью этого многочлена выведите формулу суммы

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Примеры арифметических прогрессий

22.28. а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5, составленная из членов последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины?

22.29. Можно ли из натуральных чисел, которые нельзя представить ни в виде суммы, ни в виде разности двух простых чисел, составить бесконечную арифметическую прогрессию?

Разбиение на арифметические прогрессии

Будем говорить, что натуральные числа *разбиты* на n арифметических прогрессий, если каждое натуральное число принадлежит ровно одной из этих прогрессий. Например, натуральные числа разбиты на чётные и нечётные числа.

22.30. Приведите пример разбиения натуральных чисел на три арифметические прогрессии.

22.31. Натуральные числа разбиты на n арифметических прогрессий. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — разности этих прогрессий. Докажите, что $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n}=1$.

22.32. Натуральные числа разбиты на n арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на разность прогрессии.

Разные задачи

22.33. Можно ли разбить натуральные числа на две части так, чтобы ни в одной из них не было бесконечной арифметической прогрессии?

22.34. Укажите натуральное число n, для которого числа $n+36$, $n+300$ и $n+596$ — квадраты трёх последовательных членов арифметической прогрессии.

22.35. Для проверки на прочность партии одинаковых шариков выданы два шарика. Требуется выяснить, при бросании с какого именно этажа n-этажного дома шарик разбивается. Докажите, что если $\frac{m(m+1)}{2} \geqslant n$, то это можно сделать за m испытаний.