ГЛАВА 4

Евклидовы и эрмитовы пространства

Мы используем следующее соглашение: эрмитово скалярное произведение антилинейно по первому аргументу и линейно по второму.

4.1. Элементарные свойства скалярного произведения

Задача 58. Показать, что функция φ от векторов x и y действительной плоскости, заданная формулой

$$\varphi(x, y) = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

определяет евклидово скалярное произведение на плоскости. Найти длины векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и угол между ними по отношению к этому скалярному произведению.

Решение. Очевидно, что функция φ, определённая по указанной формуле, является билинейной и симметрической. Значит, нам достаточно доказать, что $\varphi(x, x) > 0$ для любого ненулевого вектора x. Ясно, что

$$\varphi(x, x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0;$$

при этом равенство $\varphi(x, x) = 0$ может выполняться, только если одновременно $x_1 + 2x_2 = 0$ и $x_2 = 0$, то есть только при $x = 0$. Следовательно, φ — евклидово скалярное произведение.

Вычислим теперь длины векторов $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ и угол α между ними относительно этого скалярного произведения. Имеем

$$\varphi(x, x) = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi(x, y) = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\varphi(y, y) = (0 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Значит,

$$|x| = \sqrt{\varphi(x,x)} = 1, \quad |y| = \sqrt{\varphi(y,y)} = \sqrt{5}, \quad \cos\alpha = \frac{\varphi(x,y)}{|x|\cdot|y|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. □

Задача 59. Показать, что функция $(A,B) = \operatorname{tr}(A^TB)$ является евклидовым скалярным произведением в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных квадратных матриц порядка 2. Вычислить длины матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и угол α между ними.

Решение. Очевидно, что функция (A,B) является билинейной. Её симметричность следует из того, что след матрицы не изменяется при её транспонировании:

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^TB) = \operatorname{tr}(A^TB)^T = \operatorname{tr}(B^TA) = (B,A).$$

Нам нужно проверить, что $(A,A) > 0$ для любой ненулевой матрицы A. Пусть $A = (a_{ij})$. Тогда

$$A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\operatorname{tr}(A^TA) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geqslant 0$, причём равенство $\operatorname{tr}(A^TA) = 0$ достигается только при $A = 0$. Следовательно, $(A,B) = \operatorname{tr}(A^TB)$ задаёт евклидово скалярное произведение.

Вычислим скалярные произведения (A_1,A_1), (A_1,A_2) и (A_2,A_2):

$$(A_1,A_1) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_1,A_2) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

$$(A_2,A_2) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 6.$$

Таким образом,

$$\|A_1\| = \sqrt{(A_1,A_1)} = \sqrt{2}, \quad \|A_2\| = \sqrt{(A_2,A_2)} = \sqrt{6},$$

$$\cos\alpha = \frac{(A_1,A_2)}{\|A_1\|\cdot\|A_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из этого следует, что $\alpha = \frac{\pi}{6}$. □

Замечание. В этом решении длина матрицы A обозначается через $\|A\|$, а не через $|A|$, так как обозначение $|A|$ зарезервировано для определителя матрицы A.