

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. Вычисления

Уровень 1

1. 99330. 2. 14652. 3. 583920. 4. 119000. 5. 276480.
6. 18711. 7. 187335. 8. 240100. 9. 1913310. 10. 43264.
11. 140220. 12. 96317. 13. 12878. 14. 27744. 15. 305552.
16. 202878. 17. 36504. 18. 37843. 19. 196031. 20. 86856.
21. 4006968. 22. 770770. 23. 493476. 24. 2211381. 25. 9568.
26. 6985. 27. 9856. 28. 9856. 29. 7542. 30. 7426. 31. 2569.
32. 5021. 33. 2004. 34. 4587. 35. 74102. 36. 5041. 37. 6204.
38. 7024. 39. 208. 40. 602. 41. 854. 42. 450. 43. 8008.
44. 2070. 45. 9023. 46. 6589. 47. 320. 48. 733.

Уровень 2

1. 28889. 2. 24849. 3. 12677. 4. 27290. 5. 5555555.
6. 3333333. 7. 498. 8. 2017. 9. 59687. 10. 105270.

1.2. Единицы измерения

Уровень 1

1. 47 мм. 2. 5142 мм. 3. 2300085 см. 4. 3487 кг.
5. 6 т 5 ц 92 кг. 6. 1205 кг. 7. 9018 с. 8. 5 ч 9 мин 27 с.

Уровень 2

1. =. 2. <. 3. =. 4. <. 5. <. 6. =. 7. <. 8. <. 9. =.
10. <. 11. <. 12. <. 13. <. 14. >.

Уровень 3

1. 40062 см². 2. 15000 мм². 3. 907 см². 4. 50300 мм².
5. 8200 см². 6. 538 дм². 7. 42 м². 8. 640030 см².

Уровень 4

1. <. 2. <. 3. >. 4. =. 5. <. 6. =. 7. >. 8. <.

Уровень 5

1. 4 т 4 ц 12 кг 750 г. 2. 3 т 6 ц 11 кг 750 г. 3. 1 т 8 ц 10 кг 750 г.
4. 3 км 11 м 8 дм 4 см 5 мм. 5. 4 км 28 м 6 дм 1 см 5 мм.
6. 4 ц 95 кг 950 г. 7. 3 ч 44 мин 38 с. 7. 5 км 18 м 8 см 5 мм.
9. 17 т 2 ц 24 кг 541 г. 10. 110 т 1 ц 2 кг. 11. 2 ч 29 мин 53 с.
12. 9 т 7 ц 61 кг.

1.3. Задачи на худший случай**Уровень 1**

1. а) 3 шарика; б) 12 шариков; в) 11 шариков.
2. а) 16 карандашей; б) 9 карандашей; в) 14 карандашей.
3. 11 носков. 4. 7 ботинок. 5. 3 носка. 6. 9 ботинок.
7. а) 13 карандашей; б) 25 карандашей; в) 24 карандаша;
г) 26 карандашей.

Уровень 2

1. 46 карточек. 2. 10 проб. 3. 45 проб. 4. 23 груши.
5. 25 объектов. 6. а) 3 шара; б) 199 шаров.
7. а) 15 шаров; б) 5 красных шаров; в) 4 синих шара;
г) 6 белых шаров.
8. а) 25 карандашей; б) 8 жёлтых карандашей;
в) 10 оранжевых карандашей; г) 7 красных карандашей.
9. 191 шарик. 10. 9 перчаток: 8 из второго и одну из первого.

Глава 2**2.1. Уравнения****Уровень 1**

1. 184. 2. 156. 3. 51. 4. 49. 5. 57. 6. 14. 7. 9. 8. 90. 9. 16.
10. 3.

Уровень 2

1. 225. 2. 196. 3. 9. 4. 2. 5. 14. 6. 4. 7. 13. 8. 6. 9. 18.
10. 1341.

Уровень 3

1. 6. 2. 21. 3. 2. 4. 5. 5. 3. 6. 2. 7. 0. 8. 7. 9. 0.
 10. x — любое число. 11. 4. 12. 1. 13. 3. 14. 28. 15. 3.
 16. 94. 17. 18. 18. 13. 19. 88. 20. 309. 21. 19.

Уровень 4

1. 991. 2. 3. 3. 17. 4. 1. 5. 1330. 6. 6. 7. 725. 8. 61. 9. 8.
 10. 66. 11. 6.

2.2. Головы и ноги

Уровень 1

1. *Решение.* Предположим, что все животные — курицы. Тогда у них должно быть $36 \cdot 2 = 72$ (ноги). Но так как по условию ног 100, получаем недобор $100 - 72 = 28$ (ног).

Если мы заменим одну курицу на одну овцу, то станет на $4 - 2 = 2$ ноги больше, а количество голов останется прежним. Итак, нужно добавить $28 : 2 = 14$ овец вместо 14 кур. Тогда остаётся $36 - 14 = 22$ курицы.

Проверка: $14 \cdot 4 + 22 \cdot 2 = 56 + 44 = 100$ ног.

Ответ: 14 овец.

2. 15 жеребят и 7 ребят. 3. 10 автомобилей и 30 мотоциклов.
 4. 4 кошки и 6 собак. 5. 3 паука.
 6. 2 трёхколёсных велосипеда и 1 двухколёсный.
 7. 8 цыплят и 2 кролика. 8. 3 единорога.
 9. Страусов на 1 больше, чем жирафов. 10. 6 жуков и 4 паука.
 11. 7 трёхколёсных и 3 двухколёсных велосипеда.
 12. 5 машин и 5 велосипедов. 13. 2 табуретки и 3 стула.

Уровень 2

1. 7 дроидов. 2. 5 машинок. 3. 5 ног. 4. 4 змеи.
 5. 2 крокодилчика и 5 гусят. 6. 7 крокодилчиков и 13 гусят.

Уровень 3

1. 14 дней. 2. 12 уток. 3. 8 задач.
 4. *Решение.* Если бы участник решил все задачи, то он бы заработал $12 \cdot 10 = 120$ баллов. Недобор составляет $120 - 30 = 90$ баллов. Разница между количеством баллов за решённую и нерешённую задачу

составляет 18 баллов. (Обратите внимание на то, что за несделанную задачу баллы вычитаются.) Заменяем решённые задачи на нерешённые. Получим, что участник не решил $90 : 18 = 5$ задач. Значит, было решено $12 - 5 = 7$ задач.

Проверка: $7 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 30$ баллов.

Ответ: 7 ответов.

Глава 3

3.1. Дроби

- а) 17; б) 6; в) 10; г) 7; д) 20; е) 21; ё) 49; ж) 115; з) 2; и) 4; й) 1; к) 62; л) 10; м) 7; н) 10; о) 20; п) 12; р) 6; с) 15; т) 12; у) 25; ф) 21; х) 8; ц) 15; ч) 51; ш) 680; щ) 70; ь) 217; ы) 54; ь) 24; э) 45; ю) 77.
- а) 16; б) 25; в) 42; г) 48; д) 21; е) 28; ё) 18; ж) 56; з) 45; и) 85; й) 40; к) 57; л) 18; м) 30; н) 183; о) 35; п) 121; р) 20; с) 52; т) 104; у) 500; ф) 376; х) 410; ц) 297; ч) 539; ш) 148; щ) 145; ь) 514; ы) 198; ь) 405.
- а) 12; б) 27; в) 30; г) 16; д) 15; е) 22.
- а) 14; б) 12; в) 18; г) 19.

3.2. Задачи на дроби

Уровень 1

- 80 страниц. 2. 100 вареников.
- 30 минут, 20 минут, 15 минут. 4. 50 см, 25 см, 20 см. 5. 72 км.
- 18 страниц. 7. 60 марок. 8. 10 страниц. 9. 160 м. 10. 6 км.
- 180 км. 12. 12 страниц. 13. 150 минут. 14. 60 т.
- 64 км. 16. 81 рубль. 17. 40 лет. 18. 35 лет.

Уровень 2

- 49 деталей. 2. 25 км. 3. 49 страниц. 4. 81 деталь. 5. 16 км.
- 120 рублей. 7. 6 страниц. 8. 1500 рублей. 9. 81 км.
- 81 рубль. 11. 112 рублей. 12. 63 рубля. 13. 14000 рублей.
- 80 рублей. 15. 3 книги. 16. 60 лет. 17. 40 м.

Уровень 3

- 200 марок. 2. Так как 35 не делится на 3.
- 15, 30, 45 учащихся. 4. 40 учащихся. 5. 35 учащихся. 6. 135.
240. 8. 351. 9. 752. 10. На 540. 11. 624 изделия.

Глава 4

4.1. Текстовые задачи на части

Уровень 1

1. 135 г. 2. 102 кг. 3. 140 г, 70 г, 700 г.
 4. 200 г, 240 г, 360 г. 5. а) 325 г; б) 195 г.
 6. а) 240 г; б) 45 г, 165 г. 7. а) 1166 г; б) 627 г, 539 г.
 8. а) 600 г; б) 160 г, 120 г, 320 г. 9. а) 2 кг 100 г; б) 2 кг; в) 12 кг.

Уровень 2

1. 18 человек и 54 человека. 2. 4 см и 48 см. 3. 171 и 57.
 4. 60 пятёрок. 5. 36 тетрадей. 6. 16 книг и 4 книги.
 7. 490 и 70. 8. 4 кг. 9. 52 книги, 13 книг и 26 книг.
 10. 51 кг, 68 кг и 17 кг. 11. 14 м, 42 м и 84 м.
 12. 192 женщины. 13. 50 лет, 25 лет и 5 лет. 14. 20 пятёрок.
 15. 52 года, 39 лет и 13 лет. 16. Нет.

Уровень 3

1. 45 марок и 28 марок. 2. 35 пятёрок. 3. 27 км.
 4. 43 кг и 54 кг. 5. 287 км и 306 км. 6. 109 рублей.
 7. Гриша — 37 пятёрок, Яша — 33 пятёрки, Лёва — 32 пятёрки.
 8. Коля — 26 грибов, Вася — 33 гриба, Лёва — 38 грибов.
 9. 35 лет, 33 года и 12 лет. 10. 47, 48, 49. 11. 144, 145, 146.
 12. 5 л и 2 л. 13. 33 карандаша и 10 карандашей.
 14. 56 яблок и 20 яблок. 15. 12 марок. 16. 45 деталей.
 17. 14, 10 и 7 конфет. 18. 39, 22 и 13 пятёрок. 19. 3 л и 1 л.
 20. 12, 16 и 28 шишек.

Глава 5

5.1. Быстрый счёт

Уровень 1

1. 4300. 2. 8500. 3. 280. 4. 5100. 5. 40. 6. 1350. 7. 510.
 8. 800. 9. 1640. 10. 2500.

Уровень 2

1. 1500. 2. 2000. 3. 4000. 4. 870. 5. 6600. 6. 0. 7. 900.
 8. 2000. 9. 1290. 10. 380.

Уровень 3

1. 2500. 2. 10 000. 3. 10 700. 4. 41 500. 5. 18 000. 6. 414 000.

Уровень 4

1. 86 800. 2. 43 200. 3. У Тани. 4. 36 600. 5. 220 000. 6. 0.
7. У Жени. 8. 241 000.

5.2. Плюс-минус 1**Уровень 1**

1. 5 распилов. 2. 7 брёвен. 3. 750 чисел. 4. 748 чисел.
5. 25 чисел. 6. 33 числа. 7. 90 двухзначных чисел;
900 трёхзначных чисел. 8. В воскресенье вечером.
9. 11 чурбачков. 10. 6 кусков. 11. 9 разрезов. 12. 5 батонов.
13. 6 пролётов. 14. 8 раз. 15. 9 частей.

Уровень 2

1. 20 листов. 2. 40 распилов. 3. 398 см. 4. 870 чисел.
5. 5 монет. 6. 19 кусков. 7. 15 брёвен. 8. В 3 раза.
9. Одинаковые. 10. За 24 секунды. 11. За 44 минуты.
12. 200 чисел. 13. 300 распилов. 14. За 1 минуту.

Уровень 3

1. На 450 частей. 2. 21 раз. 3. За 747 минут. 4. За 2 минуты.
5. 248 листов. 6. 24 шипучки. 7. 9522, ..., 10 021.

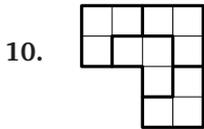
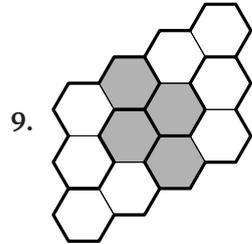
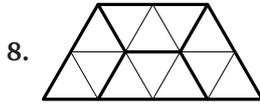
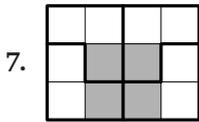
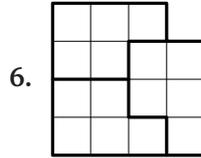
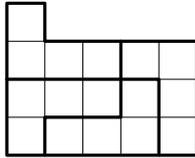
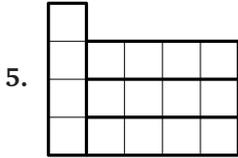
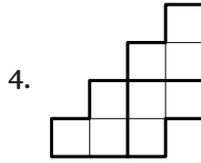
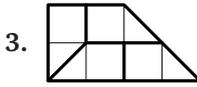
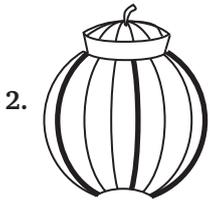
Глава 6**6.1. Разрезания****Уровень 1**

1. а) Делим каждую сторону квадрата на две равные части и соединяем точки деления, лежащие на противоположных сторонах.

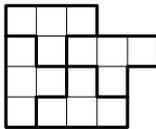
б) Делим каждую сторону квадрата на три равные части и соединяем соответствующие точки деления, лежащие на противоположных сторонах.

в) Делим каждую сторону квадрата на четыре равные части и соединяем соответствующие точки деления, лежащие на противоположных сторонах.

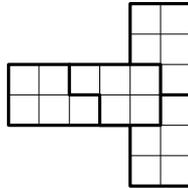
г) Берём разбиение из пункта б) и один из квадратов делим ещё на 9 частей.



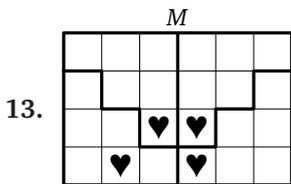
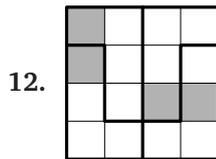
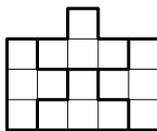
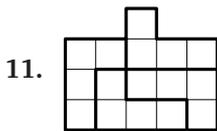
a)



б)

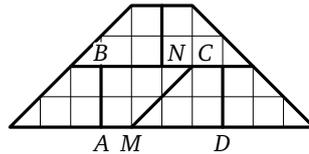
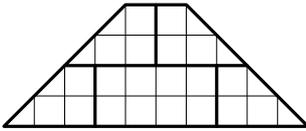


в)

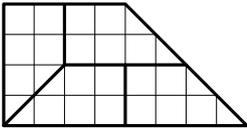


N

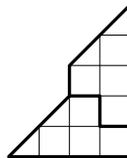
14. Трапеция состоит из 20 квадратов и 8 треугольников. Если из 2 квадратов сделать 4 одинаковых треугольника (разрежем каждый квадрат по диагонали), то оставшиеся 18 квадратов и получившиеся 12 треугольников делятся на 6 равных частей. На каждую часть будет приходиться 3 квадрата и 2 треугольника. К тому же мы должны учесть, что, разрезая на 6 равных частей, надо убрать углы трапеции. Подходящей частью является маленькая трапеция, состоящая из 3 квадратов и 2 треугольников. Она вырезана по углам данной трапеции. Оставшийся прямоугольник $ABCD$ делится отрезком MN , идущим по диагоналям клеток, на такие же трапеции.



15.

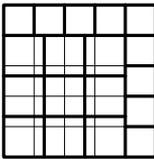


16.

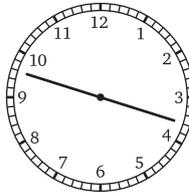


17. К одному из колец прицепляем четыре остальных кольца. При его разрезании получится пять отдельных частей.

18.



19. а)

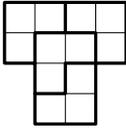


б) Так разрезать невозможно. Если бы так разрезать удалось, то суммы цифр в каждой из частей были бы равны, а значит, сумма всех цифр была бы чётной. Убедимся, что это не так:

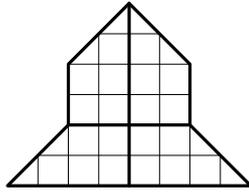
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) = \\ = 45 + 1 + 2 + 3 = 51$$

— нечётное число.

20.

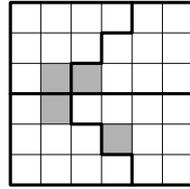


а)

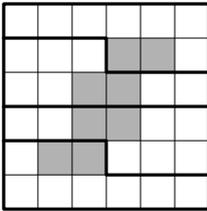


б)

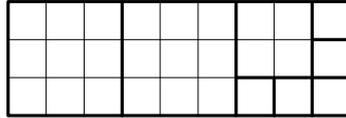
21.



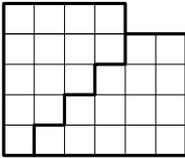
22.



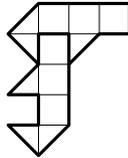
23.



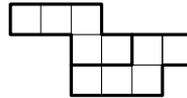
24.



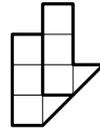
а)



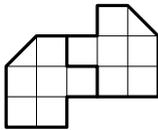
б)



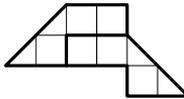
в)



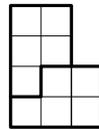
г)



д)

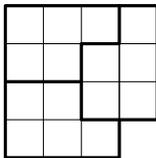


е)

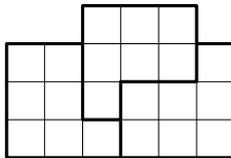


ё)

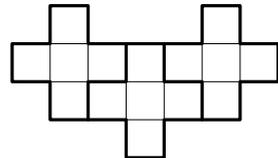
25.



а)

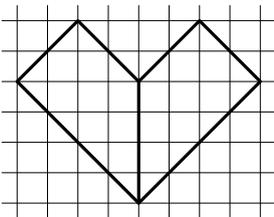


б)

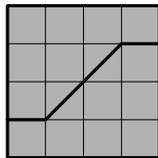
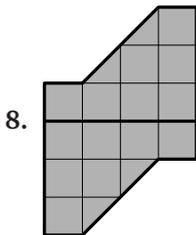
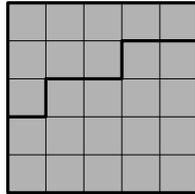
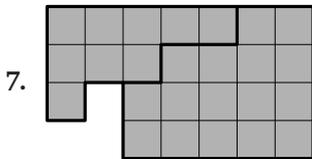
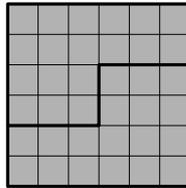
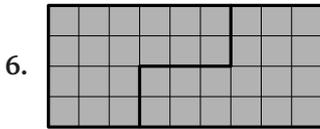
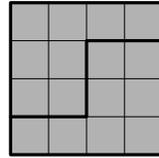
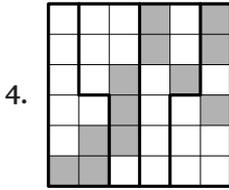
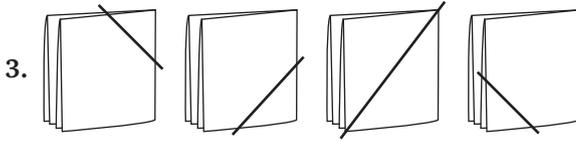
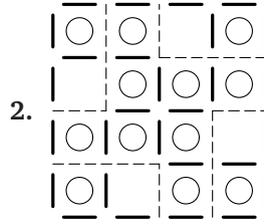
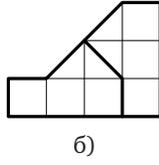
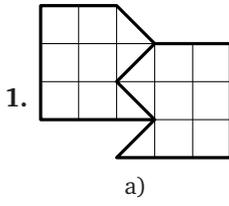


в)

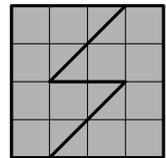
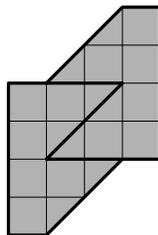
26.

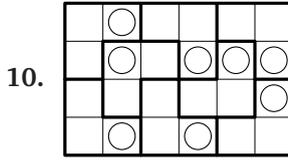
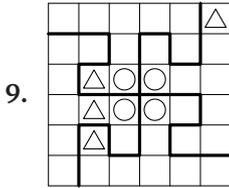


Уровень 2

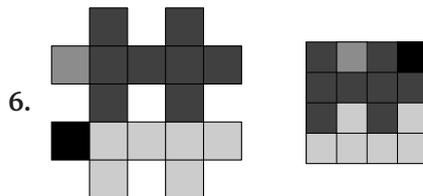
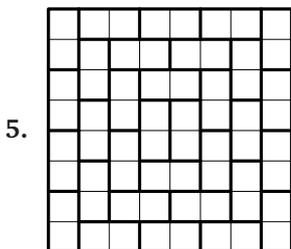
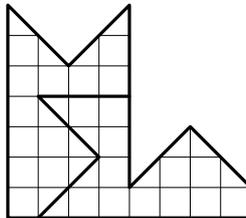
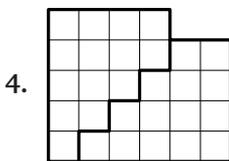
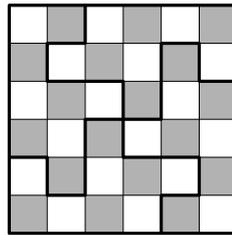
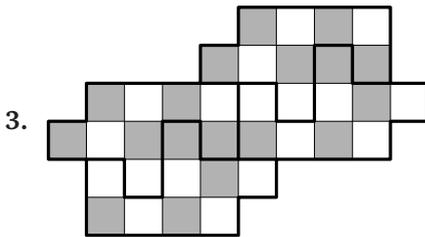
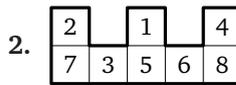
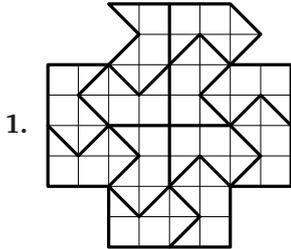


ИЛИ





Уровень 3



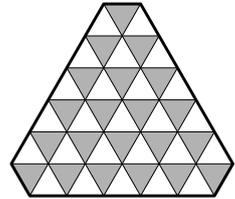
7. а) Да, можно. Шахматную доску можно разрезать на 8 полосок 1×8 , а каждую такую полоску на 4 доминошки.

б) Нет, не получится. Каждая доминошка занимает 2 клетки, т. е. если фигуру можно разрезать на доминошки, то в ней чётное число клеток. Но $8 \cdot 8 - 1 = 63$ нечётно.

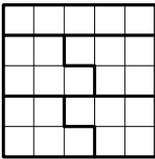
в) Да. Эту доску можно разбить на одну полоску 1×6 и 7 полосок 1×8 . Каждую из них можно разрезать на доминошки.

г) Нет. Пусть поля этой доски покрашены, как в шахматах. Заметим, что вырезанные поля одного цвета. Любая доминошка покрывает одну белую и одну чёрную клетку, т. е. при разбиении фигуры на доминошки количество белых и чёрных клеток должно быть одинаково. Но клеток одного цвета 30, а другого 32.

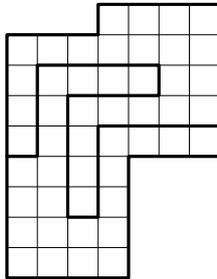
8. Раскрасим фигуру так, как изображено на рисунке. Если разрезание возможно, то в куске будет два треугольника: чёрный и белый (всего их 46), т. е. чёрных и белых треугольников должно быть поровну. Но на рисунке чёрных треугольников 21, а белых — 25, следовательно, требуемое разрезание невозможно.



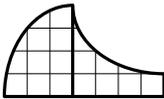
9.



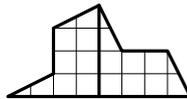
10.



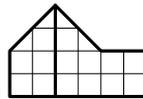
11.



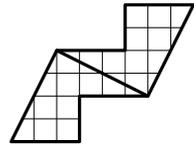
а)



б)

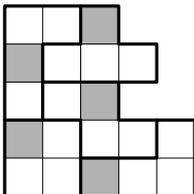


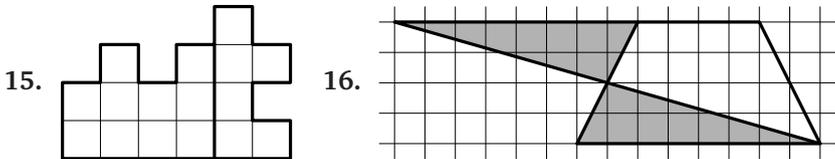
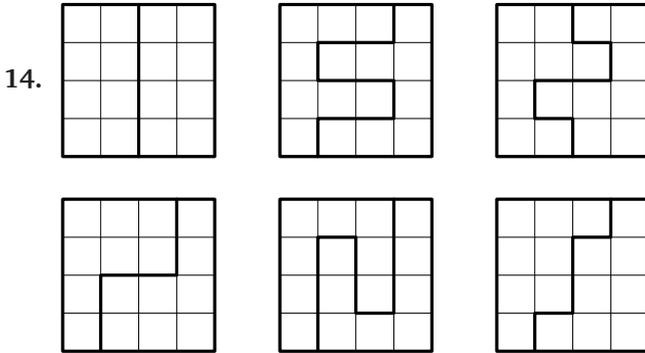
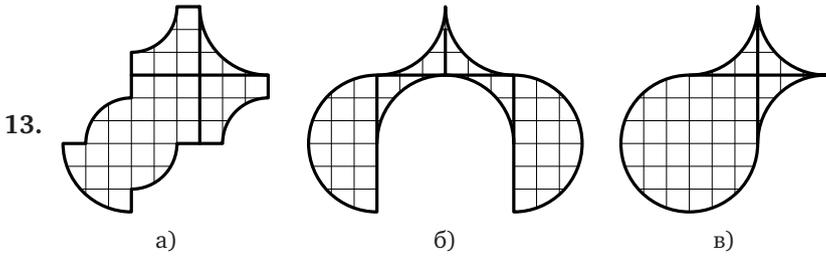
в)



г)

12.





Глава 7

7.1. Задачи на движение. Скорость, время, расстояние

1. 13 м; 16 м; быстрее ползёт змея. 2. 120 м/мин. 3. 50 км; 45 км; быстрее летит журавль. 4. 70 км/ч. 5. 170 км/ч.
 6. За 7 часов. 7. 12500 км. 8. 510 км. 9. 2 часа. 10. 5 м/с.
 11. 36 км. 12. 75 км/ч. 13. За 5 минут.
 14. Скорость мотоциклиста больше на 30 км/ч. 15. За 21 час.
 16. 10 часов. 17. 771 км. 18. 16 км/ч. 19. 3 часа до остановки, 5 часов после остановки. 20. 600 км. 21. На 18 км/ч.

7.2. Задачи на переливание

Уровень 1

1. Можно.

| | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ведро 4 л | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| Ведро 9 л | 9 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 9 | 6 |

2. Можно.

| | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| Банка 3 л | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |
| Банка 5 л | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 |

4.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|----|
| Бидон 5 л | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| Бидон 17 л | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 15 | 15 | 17 | 0 | 3 | 3 | 8 | 8 | 13 |

5. Можно.

| | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Ведро 15 л | 15 | 0 | 15 | 14 | 14 | 15 | 13 | 13 | 0 | 15 | 12 | |
| Ведро 16 л | | 15 | 15 | 16 | 0 | 14 | 16 | 0 | 13 | 13 | 16 | ... |

8. Сначала винодел наполнил 30-литровый кувшин и вылил его содержимое в 50-литровый. Потом опять наполнил 30-литровый и долил до полного заполнения в 50-литровый. В результате у него в 30-литровом кувшине осталось 10 литров.

Уровень 2

1.

| | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кастрюля 8 л | 8 | 5 | 5 | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 4 |
| Кастрюля 3 л | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| Кастрюля 5 л | 0 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 4 |

2. Если бы это было возможно, то во втором баке должно было бы быть не меньше 21 л бензина (так как иначе в нём не могло бы быть на 21 л больше, чем в третьем). Значит, в первом баке должно быть не меньше 31 л, так как в нём на 10 л больше, чем во втором. Но тогда только в первом и втором должно быть не меньше $21 + 31 = 52$ литров. Противоречие.

3. Переворачиваем и те и другие часы. Когда песок из 7-минутных часов высыпется, переворачиваем их опять. Ещё через 4 минуты закончится песок в 11-минутных часах. В этот момент надо перевернуть 7-минутные часы. Когда песок в них пересыпется обратно, пройдёт ровно 15 минут.

| | | | | | | | | | | |
|----|----------------|----|----|----|----|----|----|----|---|---|
| 4. | Сосуд 24 унции | 24 | 19 | 8 | 8 | 0 | 0 | 3 | 3 | 8 |
| | Сосуд 5 унций | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 0 | 5 | 0 |
| | Сосуд 11 унций | 0 | 0 | 11 | 0 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| | Сосуд 13 унций | 0 | 0 | 0 | 11 | 11 | 13 | 13 | 8 | 8 |

| | | | | | | |
|----|-----------------|---|---|---|---|---|
| 5. | Бочонок 6 вёдер | 4 | 4 | 6 | 6 | 3 |
| | Сосуд 3 ведра | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 |
| | Сосуд 7 вёдер | 5 | 2 | 0 | 3 | 3 |

| | | | | | |
|----|---------------|---|---|---|---|
| 6. | Банка 3 литра | 3 | 2 | 2 | 1 |
| | Банка 1 литр | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | Банка 2 литра | 0 | 0 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|------------------------|----|---|---|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 7. | Количество переливаний | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | Бидон 14 литров | 14 | 5 | 5 | 10 | 10 | 1 | 1 | 6 | 6 | 11 | 11 | 2 | 2 | 7 |
| | Бидон 9 литров | 0 | 9 | 4 | 4 | 0 | 9 | 8 | 8 | 3 | 3 | 0 | 9 | 7 | 7 |
| | Бидон 5 литров | 0 | 0 | 5 | 0 | 4 | 4 | 5 | 0 | 5 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 |

Уровень 3

1. Одинаково. *Подсказка.* Предположите, что изначально в задаче не две чашки, а две ложки.

2. Можно.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|-------|-------|-----------|-----------|-----------|--|
| Сосуд 3 литра | 3с | | | | 3в | | 3с | 3с | 1с | | 1,5в+1,5с | | |
| Сосуд 4 литра | | 3с | 3с | 3с | 3с | | 2в | 2в+2с | 2в+2с | 0,5в+0,5с | 0,5в+0,5с | 0,5в+0,5с | |
| Сосуд 5 л | | | 5в | 2в | 2в | 2в | | | 1с | 1с | 1,5в+2,5с | 2,5в+2,5с | |

3. Наливаем 5 л. Переливаем во второй кувшин до конца. Выливаем второй кувшин. Переливаем остаток из первого во второй. Вновь набираем 5 л и переливаем во второй до конца. Затем выливаем второй. Снова доливаем из первого во второй до конца. Если в первом кувшине что-то осталось, значит, мы три раза наполнили 3-литровый кувшин. Если первого не хватило, чтобы заполнить второй кувшин в третий раз, значит, второй кувшин 4-литровый.

| | | | | | | | |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Кувшин 9 литров | 9 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Кувшин 5 литров | 0 | 0 | 4 | 5 | 5 | 3 | 3 |
| Кувшин 4 литров | 0 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Кувшин 2 литров | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |

4.

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Сосуд
6 литров | 6с | 0 | 6в | 0 | 2в | 2в | 6в | 0 | 3в+3с | 3в+3с | 0 | 1в+3с | 3в+3с |
| Сосуд
7 литров | 0 | 6с | 6с | 6с | 6с | 6с | 6с | 2с | 2с | 0 | 3в+3с | 3в+3с | 3в+3с |
| Сосуд
8 литров | 0 | 8в | 2в | 2в | 0 | 8в | 4в | 4в+4с | 1в+1с | 1в+3с | 1в+3с | 0 | 0 |

Глава 8

8.1. Задачи на движение. Движение навстречу и в противоположных направлениях

- а) Через 4 часа; б) 160 км и 200 км; в) 90 км; г) 270 км.
- а) Через 6 часов; б) 450 км и 390 км; в) 700 км; г) 280 км;
д) 280 км; е) 700 км.
- 33 км. 4. 1793 км. 5. 45 км/ч. 6. 50 км/ч. 7. 240 км от
города А, 150 км от города В, через 4 часа. 8. Через 6 дней.
- Через 4 часа. 10. а) 420 км; б) в 10:00.

8.2. Три рыбака — три судака

Уровень 1

- За 3 дня. 2. а) За 2 дня; б) за 1 день; в) за 1 день; г) за 3 дня.
- а) 1 яйцо; б) 4 яйца; в) 48 яиц. 4. 18 ям. 5. 1 кг.
- 2 землекопа. 7. За 10 минут. 8. 40 компьютеров.
- 30 компьютеров. 10. 6 котов. 11. 27 яиц.

Уровень 2

- Зайцы едят быстрее. 2. а) 8 маляров; б) 80 окон; в) за 6 дней.
- 8 яиц. 4. Первая бригада. 5. 66 компьютеров. 6. 6 часов.
- За 6 часов. 8. За 5 часов. 9. За 6 часов.

Уровень 3

1. За 4 с половиной дня. 2. 20 листов. 3. 4250 рублей. 4. 320 м.
5. На 60 дней.

Глава 9

9.1. Движение вдогонку и движение с отставанием

1. а) Через 5 часов; б) 350 км и 250 км; в) 40 км; г) 80 км.
2. а) 60 км; б) через 7 часов. 3. а) 270 км; б) через 8 часов.
4. 54 км/ч или 108 км/ч.
5. а) Через 13 часов; б) 832 км от города А и 689 км от города В;
в) 88 км; г) 44 км; д) 33 км; е) 77 км.
6. 107 км. 7. а) 420 км; б) В 10:00. 7. 12 км.

9.2. Туристы и конфеты

Уровень 1

1. 10 туристов, 85 конфет. 2. 55 конфет. 3. 21 человек.
4. 5 детей. 5. 90 конфет. 6. 75 конфет. 7. 23 задачи, 6 дней.

Уровень 2

1. 6 рублей. 2. 920 конфет. 3. 108 апельсинов. 4. 105 вафель.
5. 96 слив. 6. 36 мешков, 384 зубика.

Глава 10

10.1. Комбинированные задачи на движение

1. Скорость одинаковая. 2. 12 км. 3. За 20 минут.
4. 875 м/мин. 5. Они будут на одинаковом расстоянии. 6. 120 м.
7. 60 м/ч. 8. Через 64 с. 9. Через 3 часа 30 минут, 180 км.
10. 98 м. 11. 60 м. 12. 498 км. 13. 7 часов. 14. 352 км.
15. 128 км. 16. а) 72 км/ч; б) 340 км. 17. а) В 12:00; б) 70 км.
18. На 113 шагов. 19. а) 50 км/ч, 73 км/ч; б) 615 км; в) не успеет.
20. Сонная муха. 21. 68 км. 22. 1020 м. 23. На 12:20.
24. 429 м, через 33 минуты. 25. Одновременно. 26. 6 км/ч.
27. 72 м. 28. За 6 с. 29. 2400 м. 30. В 15:56.

Глава 11

11.1. Логические задачи на таблицы

Уровень 1

1. Нина, Марина и Костя собирали яблоки, Валя и Инна — груши.
2. В банке.
3. Тамара в красном платье и красных туфлях, Валя в голубом платье и белых туфлях, Лида в белом платье и голубых туфлях.
4. Анфиса — балерина и живёт в Париже.
5. Семёнов.
6. Боря из Омска, Витя из Твери, Гриша из Томска, Егор из Казани.
7. Пётр — химик.
8. Квадрат.
9. 1 — Евгений, 2 — Дмитрий, 3 — Борис, 4 — Андрей, 5 — Виктор, 6 — Геннадий.
10. У художника Рыжова чёрный цвет волос.
11. Синий.
12. А — тренер, Б — строитель, В — журналист, Г — врач.
13. Вадим — токарь, Сергей — слесарь, Николай — электрик, Антон — шофёр.
14. У Токарева отец — слесарь, у Слесарева — плотник, у Плотникова — токарь.
15. Фёдоров — водопроводчик, Давыдов — маляр, Кондратьев — столяр.

Уровень 2

1. Митя.
2. Коля — 1, Серёжа — 2, Ваня — 3, Надя — 4, Толя — 5.
3. Боря.
4. Д — 1, В — 2, А — 3, Б — 4, Г — 5 или
Д — 1, В — 2, А — 4, Б — 3, Г — 5.
5. Д — 1, Е — 2, Б — 3, В — 4, Г — 5, А — 6.
6. Журавлёв — итальянским и испанским, Данилов — английским и немецким, Никольский — французским и арабским.

Уровень 3

1. Действие происходит в среду. Асе нужен хозяйственный, Ире — парфюмерный, Жене — обувной, Клаве — продовольственный.
2. Савин — радиотехник, Кириллов — автомеханик, Данин — химик, Борисов — строитель.
3. Коля Лысенко, Дина Шевченко, Соня Бойченко, Рома Савченко, Миша Карпенко.

4. Воду пьёт норвежец, кот Симба живёт у японца.

| | | | | |
|------------|---------------|-------------|---------|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| норвежец | украинец | англичанин | испанец | японец |
| жёлтый | синий | красный | белый | зелёный |
| «Фортнайт» | «Бравл Старс» | «Майнкрафт» | «Танки» | «Геншин» |
| каракал | лошадь | улитки | собака | кот |
| вода | чай | молоко | сок | кофе |

Глава 12

12.1. Геометрия-1

1. 36 м. 2. 60 см. 3. 56 дм². 4. 32 м. 5. 630 см². 6. 36 см.
 7. 9 см. 8. 46 м. 9. 32 дм². 10. 24 м. 11. У квадрата на 4 см².
 12. 36 см²; 24 см. 13. 35 см², 24 см. 14. 18 см². 15. 280 см.
 16. 75 см². 17. 28 дм. 18. 64 см.

12.2. Задачи на системы уравнений

Уровень 1

1. а) 55 и 38; б) 123 и 111; в) 138 и 39; г) 85 и 72; д) 60 и 14;
 е) 49 и 42.
 2. 400 г. 3. 15 рублей. 4. В 4 раза.
 5. Вилка — 15 рублей, ложка — 27 рублей. 6. 17 рублей.
 7. Рогалик — 10 рублей, пирожок — 20 рублей. 8. 15 рублей.
 9. 20 чашек.

Уровень 2

1. 20 рублей. 2. 250 рублей. 3. 8 рублей. 4. 8 булочек.
 5. Саксофон — 1 кг, барабан — 3 кг. 6. 14 шкафов. 7. В 3 раза.
 8. 50 рублей.

Уровень 3

1. Блокнот — 9 рублей, ручка — 14 рублей. 2. 185 рублей.
 3. 600 рублей. 4. 284 г. 5. 393 г. 6. 1400 козинаков.
 7. 1101 марципан. 8. 36 рублей.

Глава 13

13.1. Геометрия-2

1. 98 м. 2. 80 м. 3. 12 м. 4. 58 см. 5. 4 см^2 , 6 см^2 . 6. 14 см.
7. 42 дерева. 8. На 3 см^2 . 9. 36 м^2 . 10. 250 см.
11. 74 см, 40 см, 30 см, 26 см. 12. а) 360 см ; б) 6075 см^2 .
13. 144 см^2 . 14. 6 км. 15. 18 см, 20 см, 7 см.

13.2. Обратный ход

Уровень 1

1. 3. 2. 10. 3. 36. 4. 7. 5. 150 яблок. 6. 24.

Уровень 2

1. Илья — 7 пончиков, Миша — 3 пончика. 2. 30 мая.
3. На 7-й день. 4. 300 деревьев. 5. По 24 монеты.
6. 24 тарелки. 7. 17 домов.
8. а) Через 1 ч 59 мин 59 с; б) через 1 ч 59 мин 58 с.
9. 16 пирожков было изначально, 8 съел Рон. 10. 50. 11. 25.

Уровень 3

1. И. 2. 3 человека. 3. 24. 4. Нет. 5. 22 яблока. 6. 31 гусь.
7. 13 яблок, 7 яблок, 4 яблока. 8. 255 лимонов. 9. 43 яйца.
10. а) 350 у. е.; б) 0; в) 400 у. е. и больше. 11. 66 рублей.
12. У Кати — 66 персиков, У Лизы — 34 персика, У Маши —
18 персиков, У Насти — 10 персиков.

Глава 14

14.1. Геометрия-3

1. 2400 плиток. 2. 40 000 плиток. 3. 90 000 плиток.
4. 62 500 плиток. 5. 26 м. 6. 9 см^2 . 7. 20 см^2 . 8. 144 см^2 ,
 169 см^2 . 9. 56 см. 10. 121 см^2 , 196 см^2 . 11. 52 см. 12. 70 см.
13. 66 см. 14. 120 дм^2 , 30 дм^2 . 15. а) 54 м^2 ; б) 64 м^2 .
16. 52 см, 50 см, 66 см. 17. 6 см. 18. а) 15 м^2 ; б) 16 м; в) 7 м^2 .
19. 150 м. 20. а) 25 см^2 ; б) 50 см^2 . 21. 6111 см^2 . 22. 50 см.
23. а) 9 м^2 ; б) 3 м^2 . 24. а) 375 м^2 ; б) 6000 плиток. 25. 36 м^2 .
26. а) 30 м; б) 150 кустов. 27. а) 342 мм; б) 4 г.
28. а) 6 дм^2 ; б) 4 палочки. 29. 23 см. 30. 55 см.

Глава 15

15.1. Работа. Время. Производительность

Уровень 1

1. За 8 суток. 2. 1000 автомобилей. 3. 6 диванов. 4. За 10 лет.
5. Второй. 6. 624 м^2 . 7. Одинаково. 8. За 18 минут.

Уровень 2

1. За 3 часа. 2. 2940 велосипедов.
3. 540 л. За 36 минут и за 45 минут. 4. 75 л и 45 л. 5. 160 рыб.
6. 750 и 600 пуговиц. 7. 40 плащей. 8. На 20 м. 9. За 20 часов.
10. За 3 часа.

Уровень 3

1. 920 деталей; на 40 деталей. 2. 9 часов. 3. 72 детали,
74 детали. 4. 155 рам, 93 рамы, 0 рам. 5. 196 рам и 84 рамы.
6. 800 м^3 . 7. 273 детали и 208 деталей. 8. За 6 суток.

Глава 16

16.1. Задачи на совместную работу

Уровень 1

1. За 8 минут. 2. За 42 минуты. 3. За 12 часов.
4. Через 15 минут. 5. Через 6 дней. 6. За 12 часов.
7. На 18 дней. 8. Через 4 часа. 9. За 4 минуты. 10. За 4 минуты.
11. За 2 дня. 12. За 2 дня. 13. За 4 минуты. 14. За 3 часа.

Уровень 2

1. За 9 дней. 2. Через 15 часов. 3. Через 12 секунд.
4. За 20 дней. 5. На 30 дней. 6. За 15 часов. 7. Через 30 часов.
8. За 30 минут. 9. За 30 минут. 10. За 18 часов.

Уровень 3

1. 160 минут. 2. 2 минуты. 3. За 44 минуты.
4. а) За 21 минуту; б) за 84 минуты. 5. а) 5 дней; б) за 24 дня.
6. Через 90 минут. 7. За 560 минут. 8. а) 16 часов; б) за 32 часа.
9. 20 коров. 10. 390 репок. 11. За 2 минуты.

Глава 17

17.1. Чётность

Уровень 1

1. Да. 2. Чётной; чётной; нечётной.
3. Ч; Ч; Н; Ч; Н; Ч; Ч; Н; Ч; Н.
4. Нет, так как сумма чётного количества нечётных чисел чётна.
5. Нет. Какими могут быть числа, если их произведение нечётно? А какая тогда сумма?
6. Нет. Был один кусок, стало 3, потом 5 и т. д. Чётное число кусков получиться не может.
7. Разница между количествами голосов «за» и «против» равна 1, значит, это числа разной чётности. А сумма чётного и нечётного чисел нечётна.
8. $20 \cdot _ + 2 \cdot _ + _ \cdot 620 + _ \cdot 400$ — чётное число.
9. $2 + 2 + 2 + \dots + 2 \neq 25$? 10. 5, 3 или 1; 2021.

Уровень 2

1. Нет. *Подсказка.* Если первая шестерёнка крутится по часовой стрелке, то как должны крутиться вторая и одиннадцатая шестерёнки?
2. *Подсказка.* Как меняется цвет клетки коня после хода?
3. Да. *Подсказка.* Пусть это не так, тогда после чётного числа должно идти нечётное и наоборот. Может ли такое быть 7 раз?
4. Среди первых девяти чисел пять нечётных, поэтому результат должен быть нечётным числом.
5. Нет. Если числа отличаются на 1, то они разной чётности. Сумма четырёх чётных и четырёх нечётных чисел не может быть равна 2021.
6. Нет. На каждой странице с двух сторон написаны соседние номера. Количество нечётных номеров нечётно, значит, и сумма должна быть нечётной.
7. Нет. *Подсказка.* Могут ли разность и произведение одновременно быть нечётными? 8. 10.

Уровень 3

1. $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$. *Подсказка.* Даже если в левой части две цифры исправлены, останется одна верная цифра 4. А значит, число в правой части чётно. Тогда какая там ошибка?

2. Нет. Первоначальная сумма всех чисел равна 1. После каждого действия она увеличивается на 2. А чтобы все числа стали одинаковыми, сумма должна стать чётной.
3. Да. Нужно добиться, чтобы было чётное число голов и 0 хвостов.
4. а) 10, 10 и 80.
 б) Нет. Всего конфет чётное число. Медвежата вместе съедят поровну. Следовательно, лиса не может съесть нечётное число конфет.
5. Банан. *Подсказка.* Как меняется число апельсинов при каждой операции?
6. Чётна. 7. 8 рассказов.

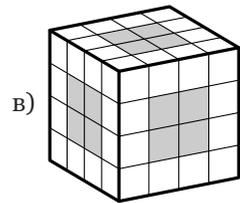
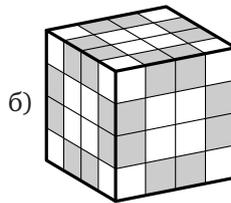
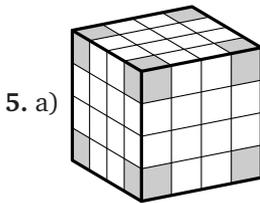
Глава 18

18.1. Принцессы и тигры

1. В первой комнате либо принцесса, либо пусто, а во второй — тигр.
2. В первой комнате тигр, а во второй — принцесса.
3. В первой комнате принцесса, во второй — тигр. Если обе истинны:
 В первой комнате — либо тигр, либо пусто.
 Во второй — принцесса.
 Если обе ложны:
 В первой комнате — либо тигр, либо пусто Во второй — принцесса.
4. В первой комнате либо принцесса, либо пусто, а во второй — тигр.
5. В первой комнате тигр, а во второй — принцесса.
6. Принцесса сидит в первой комнате, а в двух остальных — тигры.
7. Принцесса сидит в первой комнате, а в двух остальных — тигры.
8. Первая комната пуста, во второй сидит тигр, а в третьей — принцесса.
9. В обеих комнатах принцессы.
10. Принцесса в комнате VII.

18.2. Раскраска кубика

1. 6 граней, 12 рёбер.
2. а) $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2$; б) 24 см^2 ; в) 54 см^2 .
3. 27 кубиков.
4. $7 \times 7 \times 7$.



6. 18 г. 7. 24 г.

8. а) 8 кубиков; б) 12 кубиков; в) 6 кубиков; г) 1 кубик. 9. 24 см.

10. а) 125 см; б) 54 см; в) 36 см; г) 27 кубиков. 11. 96 кубиков.

12. 168 кубиков. 13. 96 кубиков. 14. 512 кубиков. 15. 90 г.

16. 4 г. 17. 192 г.

Глава 19

19.1. Рыцари и лжецы

Уровень 1

1. Соня. 2. Нет. 3. 1 рыцарь.

4. Первый — рыцарь, второй — лжец.

5. а) 0 рыцарей; б) 0 или 6 рыцарей. 6. Браун. 7. 4 лжеца.

8. 10 лет.

9. а) Например, «Солнце встает на востоке»;

б) например, «Солнце встает на западе»;

в) например, «Я рыцарь»; г) например, «Я лжец».

10. Подойдет любой вопрос, правильный ответ на который меняется со временем, например, «Который час?».

11. Андреев из Ярославля, Борисов из Ельни, Васильев из Гагарина, Григорьев из Вязьмы, Данилов из Ярцева.

12. Осёл.

Уровень 2

1. а); г). 2. 6 лжецов. 3. Виктор. 4. Ты из этого города?

5. В понедельник.

6. В — рыцарь, С — лжец, про А ничего нельзя сказать.

7. В — лжец, С — рыцарь. 8. Франция и Италия.

9. «Меня съест ваш лев». Это утверждение не истинно и не ложно.

10. Афродита.

11. Дима оба раза сказал правду. У него 7 яблок и 8 груш. У Марка 7 яблок и 9 груш.

12. 8 лет.

Уровень 3

1. Не может.
3. «Слово „тип“ означает „да“?» Рыцарь ответит «тип», лжец — «топ».
4. A — лжец, B — нормальный человек, C — рыцарь.
5. Ни одного. 6. 12 раз.
7. а) «Вы рыцарь?» Нормальный ответит «да», сумасшедший — «нет»; б) «Вы нормальный?»
8. «Добрыне заплатили больше, чем тебе?» 9. 4 человека, 2 лжеца.
10. Первый и второй из остроумцев — рыцари, остальные — лжецы.

Глава 20

20.1. Комбинаторика

Уровень 1

1. 15 способами. 2. 30 способами. 3. 12 вариантов.
4. 8 последовательностей. 5. 16 раскрасок.
6. 60 способами и 47 способами. 7. 9000 чисел, 90 000 чисел.
8. 110 способами. 9. 55 способами. 10. 12 способами.
11. 72 комплекта.
12. а) 30 способами; б) 10 способами; в) 1 способом.
13. 26 способами. 14. 27 способами.

Уровень 2

1. $2 \cdot 3^3$ чисел; $2 \cdot 3^5$ чисел. 2. 6 рукопожатий.
3. 100 чисел; 500 чисел. 4. 3^4 слов; $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ слов.
5. 32 сигнала; 8 лампочек; 10 лампочек. 6. 24 слова; 6 слов.
7. 990 способами; 165 способами; 495 способами.
8. $3136 = 64 \cdot 49$ способов. 9. 1024 марсианина.
10. 1023 способами. 11. 128 дней. 12. $4 \cdot 5^4 + 5^5$ чисел.
13. 900 способами. 14. 3^6 способами. 15. 24 строки.
16. Нет, так как иначе не хватит обозначений для букв.
17. а) $33 \cdot 32 \cdot 31$ способами; б) $\frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{6}$ способами.
18. а) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами; б) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами;
 в) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$ способами; г) $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2} = 6$ способами;
 д) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 6}$ способами.
19. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ способами.

Глава 21

21.1. Взвешивания

Уровень 1

- 12 слив.
- Попробуйте сначала отвесить 12 кг, затем 6 кг, затем 3 кг.
- Сначала сравниваем любые две монеты. Если они весят одинаково, то фальшивой является третья монета.
- Делим 9 монет на три кучки по 3 монеты, далее см. предыдущую задачу.
- Делим 27 монет на три кучки по 9 монет, далее см. предыдущую задачу.
- Переворачиваем часы одновременно, когда пройдёт 7 минут на первых часах, тогда на вторых останется 4 минуты.
- Разделим 15 монет на три кучки по 5 монет и взвесим первые две кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке, и тогда сравним её с первой кучкой. Если же одна из первых двух кучек легче, то в третьей кучке фальшивых монет нет, значит, сравним более лёгкую кучку с третьей.

Уровень 2

- а) 1, 2, 4, 8 кг; б) 3, 4, 9 кг.
- Можно поступить, например, так: поставим на одну чашку весов гирию весом 1 кг и уравновесим весы крупой из мешка. Теперь снимем с весов эту гирию и вместо неё насыпем крупу. Когда этой крупы станет ровно 1 кг, весы окажутся в равновесии.
- Да. Причём меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.
- Положим сначала на каждую чашу по 50 монет. Затем возьмём более тяжёлую часть, разобьём её на кучки по 25 монет и взвесим их. Если их массы равны, то фальшивая монета легче остальных, иначе — тяжелее остальных.
- Взвешиваем монеты по парам, тяжёлые откладываем в одну кучку, лёгкие в другую. Повторяем процесс, пока не найдём самую тяжёлую и самую лёгкую.
- Нужно положить в первый кошелек 1 рубль, во второй — 2 рубля, в третий — 4 рубля.
- Раскладываем в кошельки степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16 рублей.
- Раскладываем в кошельки степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 рубля.

11. За 10 вопросов. Делим каждый раз отрезок пополам.
12. Разбейте шары на 5 групп по 2 шара и ещё один шар.
13. а) Третье звено; б) 4 звена, так, чтобы получились куски 5, 10, 20, 40 и 21 и 4 звена по 1.
14. Взвешиваем первый пакет со вторым и третий с четвёртым. Взвешиваем два более лёгких — находим самый лёгкий, затем находим самый тяжёлый. Взвешиваем два оставшихся.
15. Положим на одну чашу весов все бриллианты из первой кучки, а на другую — 17 бриллиантов из второй (или из третьей). Если весы будут в равновесии, то в первой кучке все камни настоящие. Если равновесия нет, то кучка, камни которой не участвуют во взвешивании, содержит только настоящие бриллианты.

Уровень 3

1. Нужно взять из первого мешка 1 монету, из второго мешка — 2 монеты и т. д.
2. На весах осталась гиря массой 1 грамм.
3. Попробуйте взять 1 монету из первого мешка, 2 — из второго, 3 — из третьего, ..., n — из последнего и взвесить их.
5. Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, сложим полученные веса и получим удвоенный вес трёх яблок, а затем и вес трёх яблок, следовательно, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трёх яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые взвешиваем попарно и, суммируя все данные, получим вес 13 яблок.
6. Положим в первую кучку гирьки массой 101 г и 1 г, а во вторую — массой 100 г и 2 г, затем в первую кучку — гирьки массой 99 г и 3 г, а во вторую — массой 98 г и 4 г. Так будем действовать, пока не положим во вторую кучку гирьки массой 84 г и 18 г. Теперь положим в первую кучку гирьки массой 83 г и 20 г, а во вторую — 82 г и 21 г. Так будем продолжать до тех пор, пока во вторую кучку не придётся положить последнюю пару гирек массой 52 г и 51 г.
8. С помощью первого взвешивания определите 12 монет, в которых не более одной фальшивой.
10. Необходимо поджечь первый шнур одновременно с обоих концов — получаем 30 минут. Одновременно с первым шнуром поджигаем второй шнур с одного конца и, когда первый шнур догорит (30 минут), поджигаем второй шнур с другого конца (оставшиеся 15 минут).

Глава 22

22.1. Делимость и остатки

Уровень 1

1. Например, 3, 17 — простые, а 4, 100 — составные.
2. а) Последняя цифра делится на 2;
 б) последняя цифра — 0 или 5; в) последняя цифра — 0;
 г) сумма цифр делится на 3; д) сумма цифр делится на 9;
 е) последние две цифры образуют число, которое делится на 4.
 Например, 777732 делится на 4, так как 32 делится на 4.
3. Тот, что либо делится на 4, но не делится на 100, либо делится на 400. Високосные годы: 2016, 2004, 1892, 2000.
4. а) Да; б) да; в) да; г) не обязательно. 5. Да.
6. а) Да; б) нет; в) да. 7. а) Да; б) нет; в) да. 8. Да.
9. Частное не изменится, остаток изменится.
10. а) Да; б) да; в) нет (например, 7); г) нет (например, 11);
 д) нет (например, 7); е) нет (например, 11); ё) да; ж) да.

Уровень 2

1. Голубой. 2. $5 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 1$. 3. 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48.
4. а) У 3 последовательных чисел последовательные остатки при делении на 3, $0 + 1 + 2 = 3$;
 б) у 5 последовательных чисел последовательные остатки при делении на 5: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;
 в) у 2 последовательных нечётных чисел остатки при делении на 4 — 1 и 3; $1 + 3 = 4$;
 г) у 3 последовательных чётных чисел остатки при делении на 6 — 0, 2 и 4; $0 + 2 + 4 = 6$.
5. а) 567, 987, 618, 6228, 723, 28728, 997263, 901872, 5757, 231, 908118567;
 б) 3506, 715, 5309, 24520, 427, 40997, 24529, 2720;
 в) 567, 6228, 28728, 997263, 901872, 908118567;
 г) 987, 3506, 715, 618, 5309, 723, 24520, 427, 40997, 24529, 2720, 5757, 231;
 д) 987, 618, 723, 5757, 231; е) нет таких чисел.
6. а) 1, 4, 7; б) 2, 5, 8; в) 1, 4, 7; г) 2, 5, 8; д) 0, 3, 6, 9.
7. а) 5; б) 7; в) 8; г) 0, 9; д) 8. 8. Указательный. 9. а) 2194; б) 945.
10. а) Да; б) нет (например, 9); в) да; г) нет (например, 4); д) да; е) да; ё) нет (например, 10).

11. а) 2, 0, или 5, 0, или 8, 0, или 0, 2, или 3, 2, или 6, 2, или 9, 2, или 1, 4, или 4, 4, или 7, 4, или 2, 6, или 5, 6, или 8, 6, или 0, 8, или 3, 8, или 6, 8, или 9, 8;

б) 2, 0, или 5, 0, или 8, 0, или 3, 2, или 6, 2, или 9, 2, или 1, 4, или 4, 4, или 7, 4, или 2, 6, или 5, 6, или 8, 6, или 3, 8, или 6, 8, или 9, 8;

в) 2, 0, или 5, 0, или 8, 0, или 0, 2, или 3, 2, или 6, 2, или 9, 2, или 1, 4, или 4, 4, или 7, 4, или 2, 6, или 5, 6, или 8, 6, или 0, 8, или 3, 8, или 6, 8, или 9, 8;

г) 1, 0, или 4, 0, или 7, 0, или 2, 2, или 5, 2, или 8, 2, или 0, 4, или 3, 4, или 6, 4, или 9, 4, или 1, 6, или 4, 6, или 7, 6, или 2, 8, или 5, 8, или 8, 8.

12. а) 1, 0, или 4, 0, или 7, 0, или 0, 4, или 3, 4, или 6, 4, или 9, 4, или 2, 8, или 5, 8, или 8, 8;

б) 0, 0, или 3, 0, или 6, 0, или 9, 0, или 1, 2, или 4, 2, или 7, 2, или 2, 4, или 5, 4, или 8, 4, или 0, 6, или 3, 6, или 6, 6, или 9, 6, или 1, 8, или 4, 8, или 7, 8;

в) 2, 1, или 5, 1, или 8, 1, или 0, 3, или 3, 3, или 6, 3, или 9, 3, или 1, 5, или 4, 5, или 7, 5, или 2, 7, или 5, 7, или 8, 7, или 0, 9, или 3, 9, или 6, 9, или 9, 9;

г) 1, 2, или 4, 2, или 7, 2, или 3, 6, или 6, 6, или 9, 6.

13. а) 2, 2, или 5, 5, или 8, 8; б) 9, 9; в) 1, 1, или 4, 4, или 7, 7;

г) 9, 9; д) 5, 5; е) 0, 0; ё) 0, 0 или 6, 6; ж) 6, 6; з) 6, 6; и) 3, 3.

14. Обе стоимости делятся на 10, значит, их сумма делится на 10.

15. Обе стоимости делятся на 11, значит, их сумма...?

16. Обе стоимости делятся на 7, значит, их сумма...?

17. Права. На что должна делиться сумма? 18. $5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3$.

19. На что делятся оба числа? 20. 7, 0. 21. На что делится периметр любого квадрата?

22. Нет. На что должно делиться количество оценок? 23. 2232.

Глава 23

23.1. Принцип Дирихле

Уровень 1

1. 3 шарика. 2. а) 4 конфеты; б) 7 конфет.

3. Дни недели — «клетки» (их 7), игроки — «кролики» (их больше 8).

4. Чётность числа — это «клетки» (их 2), числа — «кролики» (их больше 2). У чисел одной чётности разница кратна 2.

5. Разделим 36 учеников-«кроликов» на группы по 3, и рассадим их по «клеткам»-месяцам (их 12). Если в одном месяце больше 3 учеников — это искомый месяц. Если нет — пытаемся «подсадить» оставшихся 4 учеников по одному в месяцы. По принципу Дирихле как минимум в одном из месяцев найдутся 4 ученика.

6. Всего цифр 10 — это «клетки». Выписанных цифр 11 — это «кролики».

7. 10 карандашей.

8. Нет. Минимальное такое количество — 45 (кучки от 1 до 9). Пусть «клетки» — это цифры от 1 до 8, тогда «кролик» — это число, соответствующее одной кучке. Для последнего «кролика» не найдётся свободной клетки.

9. Верно. Дней 366 — это «клетки». Учеников-«кроликов» больше (их 400).

10. Аналогично задаче 5. Размещаем 375 учеников по 25 волшебников в аудиторию, остаются ещё 25, которых можно только посадить в уже заполненные аудитории.

11. а) Верно; б) верно; в) нет (1 человек мог взять 7); г) нет.

12. Аналогично задаче 8. Минимальная необходимая для различных чисел сумма — 55 (от 1 до 10).

13. Да. Среди 10 человек каждый обладает от 0 до 9 знакомств. Число знакомств — «клетки», люди — «кролики». Но «клетки» 0 и 9 не могут быть «заняты» одновременно, поскольку знакомство обоюдное.

14. Он вложил один кошелёк в другой и уже во внутренний сложил монеты.

Уровень 2

1. а) «Клетки» — это кратность по модулю 5 (остаток от деления на 5, может быть от 0 до 4). Всего их 5, а чисел — 6. Следовательно, найдутся числа с одинаковым остатком. Их разница будет кратна 5.

б) Нет, если числа не обязательно идут подряд. Например, все числа могут иметь остаток 2 от деления на 5. Тогда сумма любых двух будет иметь остаток 4.

2. Да, права. Аналогично задаче 1 «клетки» — кратность по модулю 6.

4. Виды деревьев — «клетки», деревья — «кролики». Максимальное число для 100 видов по 100 деревьев — это 10 000. Останется 1 «нераспределённое дерево».

5. Сделаем 12 хитрых клеток соответственно остатку от деления на 23: 0 — отдельно, затем клетку 1—22, клетку 2—21 и т. д., так, чтобы в каждую клетку распределялись числа, сумма которых делится на 23. Таких клеток всего 12, а 13-е число по принципу Дирихле имеет либо такой же остаток, как уже лежащее в клетке число, — и тогда берём разность чисел, либо другой остаток, но тогда их сумма кратна 23.

6. «Клетки» — это размеры, по которым разложим сапоги. Если есть 50 правых и 50 левых сапог какого-то размера — это искомые пары. Если нет — значит, в каждом размере лежит неравное число левых и правых сапог. Но во всех клетках одновременно не может быть больше правых или левых, потому что тогда бы в сумме было больше левых или правых соответственно, а их поровну. Итак, пусть в клетках A и B меньше левых сапог (x и y левых сапог) и в них лежит по $100 - x$ и $100 - y$ правых сапог соответственно. Значит, в клетке B меньше правых и в ней z правых и $100 - z$ левых сапог. Тогда всего годных пар $x + y + z$, а $x + y + 100 - z = 150 \geq x + y + z = 50 + 2z$. При положительном z утверждение доказано. Симметричное рассуждение, где в двух первых клетках A и B меньше правых сапог, доказывается аналогично.

7. а) от 1 до 3;

б) от 1 до 8. Каждый маленький человек может «украсть» максимум одну пару большего человека. Значит, максимальное количество «украденных» пар — половина от всех пар. В случае нечётного количества пар округляем в меньшую сторону, так как ушедшие 8 человек не могут «украсть» 9 пар галош оставшихся людей — найдётся человек со своими или большими галошами.

8. Посмотрим, кого за столом больше: людей с гоблинами или эльфов с гномами. Без ограничения общности можно считать, что людей с гоблинами больше; тогда их по крайней мере 17, так как всего за столом сидят 33 существа. Пусть теперь эльфы с гномами встанут со своих мест. Из оставшихся какие-то двое обязательно сидят на соседних местах, поскольку занятых мест больше половины. Но эти двое не могут быть из разных племён, так как по условию люди не сидят рядом с гоблинами; значит, рядом сидят представители одного племени, что и требовалось доказать.

9. Представим, что мы разрезали коврик на 16 квадратных ковриков $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$. Так как дырок только 15, обязательно найдётся коврик со стороной 1 м без дырок.

10. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Без ограничения общности можем считать, что чёрных клеток — 13, а белых — 12. «Чёрные» жуки могут переползть только на «белые» клетки, и наоборот.
11. Всего возможно 7 различных значений для суммы: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ — это и будут клетки. А кроликов, т. е. сумм, — 8.
12. Разложим кучки по возрастанию. Предположим, что они все различные. Значит, это по крайней мере подряд идущие числа. Но $0 + 1 + 2 + \dots + 20 = 210 > 200$. Следовательно, гипотеза неверна.
13. «Клетки» — пары диаметрально противоположных стульев. Их 50.
14. «Клетки» — остаток от деления на 10. Всего их 10, а чисел 11. Значит, какие-то два числа попадут в одну «клетку» и их разность будет кратна 10.
15. От противного. Для такой групповой покупки нужно по крайней мере 1600 рублей.

Глава 24

24.1. 10 тренировочных вариантов

Вариант 1

1. а) 179; б) 8 186 369. 2. а) 9; б) 18. 3. 46 см, 40 см, 70 см.
4. 60 км/ч, 70 км/ч. 5. Больше тех, кто принёс циркуль.
6. Митя, Андрей, Вася, Федя, Вадик.

Вариант 2

1. а) 836; б) 7008. 2. а) 18; б) 13. 3. 40 кг.
4. а) 300 км; б) 120 км.
5. Морковь — 15 рублей, картофель — 12 рублей. 6. 73.

Вариант 3

1. а) 200; б) 18 022 765. 2. а) 14; б) 6. 3. 196 см^2 или 256 см^2 .
4. Через 5 часов. 5. 1 кошка, 1 попугай, 1 собака. 6. 8 кг.

Вариант 4

1. а) 27 028 000; б) 12 677. 2. а) 725; б) 4. 3. 4 минуты.
4. 5544 плитки.
5. Белая — красная, чёрная — жёлтая, зелёная — голубая.
6. 2474.

Вариант 5

1. а) 3 701 543; б) 5 590 094; в) 272 043 000; г) 2022. 2. а) 9; б) 17.
3. 160 минут. 4. 382 км. 5. 9989. 6. 110 рублей.

Вариант 6

1. а) 100; б) 7. 2. а) >; б) <; в) =. 3. 40 см. 4. Через 2 часа.
5. $26 \cdot 25 \cdot 24$ вариантов. 6. 658 рублей.

Вариант 7

1. а) 59; б) 25.
2. а) Первая величина больше на 293 с; б) одинаковые;
в) первая величина больше на 480 кг.
3. 36 см^2 .
4. а) 90 км/ч; б) 585 км. 5. 1400 рублей. 6. 24.

Вариант 8

1. а) 575 630; б) 518. 2. 13 кг 600 г. 3. 238 зёрнышек.
4. 468 км. 5. 5 с цветными, 4 с простыми карандашами. 6. 28.

Вариант 9

1. а) 73 712; б) 778 221. 2. 5. 3. 66 см. 4. а) 60 км/ч; б) 403 км.
5. 55 шаров. 6. 104 цифры.

Вариант 10

1. а) 2022; б) 94. 2. 4875 мм. 3. 86 км/ч.
4. Нет. Подсказка. Вспомните задачи про чётность. 5. За 40 часов.
6. 338 потатук.

Глава 25

25.1. 150 интересных задач

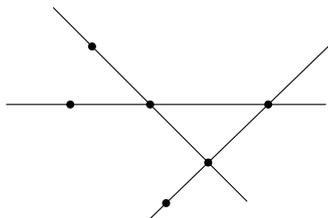
1. а) $33 - 3 = 30$; б) $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 = 30$; в) $33 - 3 + 3 - 3 = 30$;
г) $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 - 3 + 3 = 30$.
2. а) $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 8$; б) $1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 9$;
в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 : 6 + 7 - 8 - 9 = 10$.
3. 240 км, 80 км, 120 км или 40 км. 4. 174 фигурки.
5. 11 перчаток.
6. а) $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$; б) 5050; в) 2500. 7. 45 рублей.

8. 3 часа; 120 км. 9. Прав. Подсказка. Составьте уравнение.
10. 76, ..., 125. 11. а) 121 см^2 ; б) 13 кубиков.
12. 23 опытных воина. 13. а) Через 13 минут; б) 650 м.
14. 12 блинов. 15. Было 22 пончика, Джа-Джа съел 11 пончиков.
16. а) 5 недель, или 35 дней; б) 102 куска сыра. 17. 50 км.
18. 10 углов. 19. Влад. 20. 1650 см^2 . 21. 4200 км.
23. Винни-Пух ест ложкой в 6 раз быстрее, чем вилоккой.
24. 120 см^2 . 25. 12 карточек. 26. 45 обезьян.
27. На первом канале. 28. Заяц. Подсказка. Составьте уравнение.
29. 10 см. 30. 68 минут. 31. 8 копеек. 32. 12 см 5 мм.
34. 44 года. 37. Ананас.
38. Переправляются два лёгких; один из них пригоняет лодку
обратно; переправляется тяжёлый; второй лёгкий пригоняет лодку
обратно; снова переправляются два лёгких.
39. $7:7+7-7=1$; $7:7+7:7=2$; $(7+7+7):7=3$; $77:7-7=4$;
 $7-(7+7):7=5$; $(7\cdot7-7):7=6$; $7+(7-7):7=7$.
40. а) $1\cdot2+3=5$; б) $12-3-4=5$; в) $12-3\cdot4+5=5$;
г) $(1+23):4+5-6=5$; д) $12-3+4+5-6-7=5$;
е) $1\cdot23-4-5+6-7-8=5$.
41. 1 жёлтый шарик. 42. Женя — девочка.
43. А — рыцарь, Б — лжец, В — лжец, преступник.
44. Петя на 6 минут быстрее. 46. 24 способами. 47. 4 банки.
48. 16 здоровых. 49. 159 цветков.
51. Хозяйки потратили денег поровну, но вторая купила больше мо-
лока.
52. Воскресеньем. 53. 50 листов. 54. 3 листа. 55. Ване 15 лет.
56. Да. 57. Принцесса в комнате I. 58. 41312432.
59. Одинаково (см. задачу 1 уровня 3 на с. 57).
60. 60 тюльпанов. 61. 67 см. 62. 39, 30, 27 или 26. 63. 100 м.
64. а) 126 см^2 ; б) 50 см. 65. 27400 см^2 ; 480 см.
68. 10 км. 69. $\frac{1}{4}$. 70. 105 долларов.
71. 24 рыжих и 11 черноволосых. 72. 25 см^2 . 74. За 59 минут.
75. Через 30 дней. 76. За 200 прыжков. 77. За 7 дней.
78. 24 полена. 79. 9 пачек. 80. 43 года. 81. 5050 матчей.
82. 9 зук. 84. 28 см. 85. Ключик находился в зелёной коробке.
87. Принцесса в комнате III. 88. За 35 дней. 89. 16 см^2 .
90. 70 шаров. 91. 18, 10 и 8 воробьёв. 92. 1500 дм^2 .
93. Например, 25. 94. 5 и 6.

95. Валентин пробегает $50 \cdot 60 = 3000$ см за 100 с, т. е. его скорость равна 30 см/с, что составляет 18 м/мин.

96. В январе. 97. В 14:00. 98. 45 лет. 100. в), г), д).

101.



102. 13, 2, 17. 103. Первый. 104. 16 парт. 105. 40 минут.

106. 32 л. 107. 44 способами. 108. 2. 109. 52.

111. 59 белых шариков. 112. 8 банок.

113. 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112 лет.

114. Подсказка. Проверьте, делится ли 773 на 3.

115. У зелёного 6 ног, у остальных по 7. 116. а) 50 см; б) 144 см^2 .

117. 3 дня и 180 дней. 118. 78 человек и 26 человек. 119. 9 лет.

120. Нет. Подсказка. Используйте чётность.

121. 200 человек. 122. Петя — 1, Юра — 2, Витя — 3, Серёжа — 4.

123. 9 км. 124. 33. 125. За 30 с. 126. В пятницу или субботу.

127. В понедельник. 128. 1199 камешков. 129. Поровну.

130. 5 кг.

131. 2 фотографии. 132. На 10 минут. 133. Иванов Сидор,

Петров Иван, Сидоров Пётр. 134. 18 кусков. 135. Валя.

136. 22 окуня.

137. Верны утверждения а), б), г), ж). Можно зачеркнуть число 179, тогда утверждение ж) окажется ложным и ложных утверждений будет больше, чем истинных.

138. Артём играет в «Fortnite», Андрей — в «PUBG», Дима — в «Overwatch», Петя — в «Minecraft».

139. 20 кг овощей суммарно. 140. 30 дворов.

141. Например, Иван Иванович Иванов, Иван Сидорович Сидоров, Александр Иванович Сидоров, Александр Сидорович Иванов.

142. Через 12 минут. 143. 20 копеек.

144. Алексеев преподаёт биологию и математику, Воронин — английский и историю, Соколов — физику и химию.

145. 2160 кг. 146. 18. 147. Нет. 148. На 975 г.

149. На 990-м месте. 150. 9 коней.