Оглавление

Том 1

Предисловие 11
Введение 13

Глава I. Броуновское движение, или винеровский процесс
§ 1. Определения 21
§ 2. Разные свойства инвариантности броуновского движения 24
§ 3. Некоторые процессы, получаемые из броуновского движения . . . 26
§ 4. О гауссовских (нормальных) величинах, плотностях и процессах 28
§ 5. Некоторые общие сведения о дельта-функции. Обобщенные функции 32
§ 6. Белый гауссовский шум как «производная» броуновского движения 40
§ 7. Фрактальное броуновское движение 42

Глава II. О существовании математического броуновского движения
§ 1. Конструкция броуновского движения в виде функциональных рядов со случайными коэффициентами 45
§ 2. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданной системой конечномерных распределений 53
§ 3. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации 59
§ 4. Применение общих результатов о построении случайных процессов с непрерывными траекториями к вопросу о существовании броуновского движения 64

Глава III. Недифференцируемость, немонотонность и другие свойства броуновского движения
§ 1. Недифференцируемость 69
§ 2. Немонотонность, нули и локальные экстремумы броуновского движения 72
§ 3. Вариация ($\sum|\Delta B|$) и квадратическая вариация ($\sum|\Delta B|^2$) 75
§ 4. Некоторые траекторные свойства процесса приращений $(\Delta B_t)_{t\geqslant 0}$ броуновского движения. Исключительные моменты времени . . . 80

Глава IV. Фильтрованные пространства. Моменты остановки, марковские моменты. Прогрессивная измеримость
§ 1. Фильтрованные пространства и фильтрованные вероятностные пространства . . . 83
§ 2. Моменты остановки, марковские моменты . . . 86
§ 3. О σ-алгебрах, порожденных моментами остановки и марковскими моментами . . . 94
§ 4. Необходимость введения броуновского движения на фильтрованных пространствах . . . 98
§ 5. Законы нуля или единицы . . . 102
§ 6. О предсказуемых, опциональных, измеримых и прогрессивно измеримых σ-алгебрах и процессах . . . 104

Глава V. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения
§ 1. Марковское свойство . . . 111
§ 2. Строго марковское свойство для броуновского движения . . . 115
§ 3. Принцип отражения . . . 119
§ 4. О некоторых понятиях общей теории марковских процессов . . . 121

Глава VI. Закон повторного логарифма и законы арксинуса и арктангенса
§ 1. Закон повторного логарифма — 1. Формулировка в случае дискретного времени . . . 125
§ 2. Закон повторного логарифма — 2. Доказательство в случае дискретного времени . . . 133
§ 3. Закон повторного логарифма для броуновского движения . . . 138
§ 4. Законы арксинуса . . . 141
§ 5. Законы арктангенса . . . 146

Глава VII. Броуновский мост. Применения в математической статистике
§ 1. Определения . . . 151
§ 2. О распределении вероятностей броуновского моста как условном распределении броуновского движения . . . 153
§ 3. О критериях согласия Колмогорова и Смирнова . . . 154
§ 4. О распределениях Колмогорова и Смирнова . . . 160

Глава VIII. Опциональность, равномерная интегрируемость. Дискретное время
§ 1. Опциональные теоремы — 1 . . . 165
§ 2. Равномерная интегрируемость . . . 171
§ 3. Опциональные теоремы — 2 . . . 177
§ 4. Основная опциональная теорема . . . 181

Глава IX. Опциональные теоремы. Непрерывное время
§ 1. Опциональные теоремы для мартингалов и субмартингалов 185
§ 2. Первое и второе тождества Вальда для броуновского движения . . 187
§ 3. Фундаментальное тождество Вальда и критерии его выполнимости 193

Глава X. Мартингальные свойства и характеризация броуновского движения. Мартингальные неравенства
§ 1. Определения, примеры 199
§ 2. Мартингальная характеризация броуновского движения. Теоремы П. Леви 202
§ 3. Теорема Гирсанова 205
§ 4. Мартингальные неравенства 212

Глава XI. О вероятностных свойствах некоторых моментов выхода броуновского движения
§ 1. Свойства момента остановки $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t = a\}$ 221
§ 2. Свойства момента остановки $\sigma_a = \inf\{t \geqslant 0 \colon |B_t| = a\}$ 224
§ 3. Свойства момента остановки $\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t \geqslant a + bt\}$ 228
§ 4. Свойства момента остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t \notin (-a + bt, a + bt)\}$ 231
§ 5. Свойства моментов выхода броуновского движения на некоторые криволинейные границы 232
§ 6. О свойствах некоторых моментов остановки и распределении sup для броуновского движения со сносом 236

Глава XII. Броуновское движение и стохастический анализ
§ 1. Стохастический интеграл по броуновскому движению с фиксированным верхним пределом. Прогрессивно измеримые процессы . 241
§ 2. Стохастический интеграл по броуновскому движению с переменным верхним пределом 247
§ 3. Расширение класса интегрируемых функций (от $\mathscr{H}_2[0, T]$ к $\mathscr{L}_2[0, T]$) 252
§ 4. Формула Ито — 1. Вывод 256
§ 5. Формула Ито — 2. Эвристические рассмотрения 261
§ 6. Формула Танака и локальное время броуновского движения 264
§ 7. Лемма Скорохода. Теорема Леви о совпадении распределений процессов $(\max B - B, \max B)$ и $(|B|, L)$ 269
§ 8. Обобщение теоремы Леви на случай броуновского движения со сносом 272
§ 9. О некоторых обобщениях формул Ито и Танака 276

Глава XIII. Возвратность и невозвратность случайного блуждания и броуновского движения. Время пребывания. Функция Грина броуновского движения
§ 1. Мера пребывания и локальное время броуновского движения $(d = 1)$ 285

§ 2. Среднее значение меры пребывания и функция Грина для броуновского движения — 1 289
§ 3. Среднее значение меры пребывания в случае простого d-мерного случайного блуждания. Возвратность и невозвратность 292
§ 4. Возвратность и невозвратность броуновского движения в размерностях $d \geqslant 1$ 298
§ 5. Среднее значение меры пребывания и функция Грина для броуновского движения — 2 301

Глава XIV. Аналитические и вероятностные аспекты теории потенциала. Гармонические функции
§ 1. Исторический экскурс 309
§ 2. Классическая проблема Дирихле для оператора Лапласа 310
§ 3. Решение Пуассона задачи Дирихле на диске 314
§ 4. Гармонические, субгармонические и супергармонические функции. Свойства в среднем 319
§ 5. Следствия из свойств в среднем для гармонических функций . . . 327
§ 6. Вероятностный подход к задаче Дирихле для оператора Лапласа . 332
§ 7. Вероятностный подход к задаче Пуассона для оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями 335
§ 8. Вероятностный подход к задаче Пуассона для оператора Лапласа с граничными условиями Неймана 337

Глава XV. Векторный анализ и векторное исчисление в теории потенциала
§ 1. Скалярные и векторные поля, скалярное и векторное произведения, дифференциальные операторы 343
§ 2. Векторное исчисление — 1. Теоремы Ньютона—Лейбница, Гаусса—Остроградского 349
§ 3. Векторное исчисление — 2. Теоремы Грина и Стокса 353
§ 4. Первое и второе тождества Грина 361

Глава XVI. Фундаментальные решения и функции Грина
§ 1. Фундаментальные решения 363
§ 2. Функции Грина 370
§ 3. Метод отражений — 1. Нахождение функции Грина для оператора Лапласа в полуплоскости 377
§ 4. Метод отражений — 2. Нахождение функции Грина для оператора Лапласа в шаре 379
§ 5. Фундаментальные решения и функция Грина для уравнения теплопроводности 381

Глава XVII. Стохастическая динамика Ланжевена. Процесс Орнштейна—Уленбека
§ 1. Динамика Ланжевена 387

§ 2. Процесс Орнштейна—Уленбека 389
§ 3. О неоднородных процессах Орнштейна—Уленбека и детерминированной замене времени 395
§ 4. Оценка параметров стационарного комплексного процесса Орнштейна—Уленбека 400

Глава XVIII. Процессы Бесселя
§ 1. Квадратичные процессы Бесселя целочисленной размерности $n \geqslant 1$ с нулевыми начальными условиями 403
§ 2. О распределении вероятностей квадратичного процесса Бесселя размерности $\delta \geqslant 0$ с произвольными начальными условиями . . . 406
§ 3. Об обобщенной статистике $\chi^2_\delta(a)$ и еще об одном способе определения квадратичного процесса Бесселя размерности $\delta \geqslant 0$ 412
§ 4. Процессы Бесселя 415
§ 5. Процессы Бесселя и случайная замена времени. Преобразование Ламперти 421
§ 6. Бесселевские процессы в соотношениях с равенством по распределению (теоремы Питмена, Рэя и Найта) 423

Глава XIX. О стохастических представлениях по броуновскому движению
§ 1. Сводка некоторых общих результатов об интегральных представлениях 431
§ 2. Доказательство утверждений А в теоремах 1 и 2 434
§ 3. О стохастических интегральных представлениях некоторых частичных максимумов броуновского движения 438
§ 4. Детерминированная и стохастическая замены времени. Теорема Дамбиса и Дубинса—Шварца для одномерных локальных мартингалов 446
§ 5. Теорема Найта для многомерных локальных мартингалов. Тождество Бужероля. Теорема Монро для семимартингалов 451
§ 6. Вложение Скорохода (последовательности случайных величин в броуновское движение) 454
§ 7. О некоторых преобразованиях вида $X = f \circ T + B \circ T$, представляющих интерес для математической статистики и финансовой математики 457
§ 8. О представлении гауссовских процессов, эквивалентных броуновскому движению, с помощью стохастических интегралов типа Вольтерра 460
§ 9. О представлении гауссовских процессов посредством замены времени, стохастических рядов и стохастических интегралов типа Фредгольма 463

Глава XX. О плоском (двумерном) броуновском движении и его связи с комплексным анализом

§ 1. Конформная инвариантность П. Леви 469
§ 2. Об асимптотическом поведении угловой составляющей комплексного броуновского движения. Теорема Спицера 473
§ 3. Об асимптотическом поведении аддитивных функционалов от комплексного броуновского движения. Теорема Каллианпура—Роббинса 478
§ 4. О некоторых свойствах линейного и плоского броуновских движений с переменным сносом 481
§ 5. О площади, заметаемой броуновским диском конечного радиуса. Теорема Колмогорова—Леонтовича 483

Литература 489
Обозначения 519
Предметный указатель 523

Том 2

Предисловие

Глава XXI. Винеровская мера

Глава XXII. Дифференциальные уравнения в частных производных и стохастические представления решений некоторых из них

Глава XXIII. О роли броуновского движения в классических и функциональных предельных теоремах. Метрические пространства. Критерии слабой сходимости

Глава XXIV. Регулярность, плотность и равномерная плотность вероятностных мер. Критерии равномерной плотности

Глава XXV. Слабая сходимость вероятностных мер на метрических пространствах

Глава XXVI. Метод Стейна в оценивании близости вероятностных мер

Глава XXVII. Предпосылки к исчислению Маллявэна. Полиномы Эрмита. Формула Мелера и гармонические осцилляторы

Глава XXVIII. Операторы Эрмита, Мелера, Орнштейна—Уленбека. Неравенства Эфрона—Стейна, Пуанкаре и Соболева

Глава XXIX. О функционалах, их производных и интегралах (кратных и повторных) на винеровском пространстве

Глава XXX. Исчисление Маллявэна

Глава XXXI. Некоторые приложения исчисления Маллявэна

Глава XXXII. Некоторые применения исчисления Маллявэна в финансовой математике

Глава XXXIII. Исчисление Маллявэна и метод Стейна в гауссовской аппроксимации распределений вероятностей функционалов на винеровском пространстве

Глава XXXIV. Диффузия и стохастические дифференциальные уравнения

Глава XXXV. Обратные стохастические дифференциальные уравнения

Глава XXXVI. Некоторые применения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Нелинейные и сублинейные ожидания. Меры риска

Глава XXXVII. О принципах вариационного исчисления и обратных уравнениях в детерминистических и стохастических системах

Глава XXXVIII. Размерности Минковского и Хаусдорфа. Применение к броуновскому движению

Глава XXXIX. О подходах к основаниям квантовой механики. Вероятностная интерпретация