Предисловие

Во второй половине XIX века произошло событие, сопоставимое по своему историческому, культурному и цивилизационному значению с появлением в Древней Греции (Фалес, VI век до н. э.) дедуктивной математической системы. Математики начали понимать, что «должно быть позволено рассуждать об объектах, не имеющих никакой наглядной или чувственной интерпретации». В 1870 году получила признание геометрия Лобачевского. Это произошло после того, как Феликс Клейн обнаружил в одной работе Артура Кэли «модель», позволяющую отождествить объекты и соотношения геометрии Лобачевского с некоторыми объектами и соотношениями евклидовой геометрии. Этим он доказал, что геометрия Лобачевского непротиворечива в той же мере, что и евклидова, — противоречие в одной из них необходимо влечёт противоречие в другой. В 1872 году почти одновременно Кантор, Дедекинд и Вейерштрасс дали определение (правда, довольно различными методами) вещественного числа, затем Вейерштрасс определил отрицательные числа в виде классов пар натуральных чисел, и наконец в 1888 году Дедекинд сформулировал полную систему аксиом для арифметики (аксиомы Пеано). В геометрии похожие процессы завершились выходом в 1899 году книги Гильберта «Основания геометрии», где он объяснил, что прямая, точка и плоскость появляются только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются. Другими словами, назвать ли их точками, прямыми, плоскостями или же столами, стульями, пивными кружками, — это будут те объекты, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами. *Родился новый формальный язык*! *И новая интуиция*! Теперь «интуиция отнюдь не обязательно имеет пространственную или чувственную природу, как часто думают, а скорее представляет собой некоторое *знание поведения математических объектов*, часто прибегающее к помощи образов самой различной природы, но основанное прежде всего на повседневном знакомстве с этими объектами» (Бурбаки).

В математическом образовании вследствие такого развития науки появились разрывы. Точка разрыва — это неверно сформированная интуиция, или, иными словами, это разрыв в математической культуре.

Точки разрыва в математическом образовании сильно снижают его уровень и качество. С некоторыми разрывами справиться легко, просто указав на них. Есть разрывы более серьёзные. Открытие геометрии Лобачевского оказало огромное влияние на развитие математики. Такую же роль эта геометрия должна играть и в образовании. Но представление о том, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной, не стало общедоступным. Это даже, скорее, точка отрыва школьной математики от общекультурных достижений.

Наконец, имеются и узаконенные, но устранимые, как мы полагаем, разрывы. Школьная математика уже в средних классах становится в основном конкурсно-олимпиадной. Мы учим детей решать вычурные, никому не нужные и при этом очень сложные задачи, которые зачастую не хочется не то что решать, даже вникать в условия! Причём в подборе этих задач, как правило, нет системы. Ни о каком формировании интуиции в этой ситуации говорить просто не приходится. Какое представление о математике после этого складывается у наших учеников, одному Богу известно.

Что же делать? Перейдём теперь к конкретным предложениям.

Теория чисел в школе

Теория чисел, на наш взгляд, доставляет замечательный пример, который может способствовать устранению разрывов в образовании.

Во-первых, следуя Пуанкаре и Арнольду, мы полагаем, что математика является частью теоретической физики, т. е. экспериментальной наукой. Слово «математика» означает «точное знание», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы. Решая огромное количество задач, школьники учатся не наблюдать явления, а отвечать на *уже поставленные* вопросы и на то, что математика — искусство их задавать, не обращают внимание. В теории чисел эксперимент играет огромную роль и позволяет самостоятельно пройти путь от наблюдения и формулирования гипотезы до доказательства теоремы. Неоценимый опыт!

Во-вторых, школьники не подозревают, что они не знают, что такое натуральное число, 0, -1, многочлен. Может быть, строгих определений здесь давать и не надо (хотя наш опыт показывает, что такие разговоры идут «на ура», и мы приводим в тексте соответствующие определения), но отметить их отсутствие необходимо. Иначе сложится ситуация, когда привыкание заменяет понимание, что, конечно, есть точка разрыва. Но в школьной математике есть точки разрыва и посерьёзнее. Например, формальный язык обладает одной важной особенностью — фиксацией аналогий. Похожие структуры выделяются термином и определённым набором аксиом, которые отражают те или иные свойства этих структур. Так, например, множества целых чисел $\mathbb{Z}$, многочленов $\mathbb{R}[x]$ и гауссовых чисел $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ похожи. Эта похожесть фиксируется определением: все эти множества называются *кольцами*. Такая особенность формального языка позволяет изучать одновременно целые классы структур и постоянно используется в современной математике. Когда вчерашний школьник приходит на первую лекцию и слышит определение кольца (группы, поля, ...), то воспринимает эти объекты, по выражению Арнольда, как «множества с операциями, удовлетворяющими длинному ряду труднозапоминаемых аксиом...». Нет смысла комментировать, сколь пагубно это сказывается на его образовании. Новоиспечённый студент не подготовлен к восприятию такого языка, потому что «школьная» математика конкретна, а к формальному языку нужно привыкнуть, уметь его узнавать. На это требуется время. Мы надеемся, что наш курс теории чисел позволяет достичь этой цели, постепенно, начиная с конкретных примеров, давая ученикам почувствовать аналогию между похожими структурами (например, кольцами $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$) и подготавливая их (как будущих студентов) к восприятию формального языка.

В-третьих, теория чисел, безусловно, учит решать задачи. По всей видимости, именно последнее соображение является для многих смыслом и целью изучения теории чисел. Научить решать задачи! И всё! Как правило, для сборников задач характерно полное отсутствие сюжетов, задачи в них появляются так, как будто они вылетели из «датчика случайных чисел». А то, что среди них есть такие, которые высвечивают целый спектр ключевых идей, остаётся за кадром! Одним из таких примеров является задача описания пифагоровых троек — она не только мотивирует идею рассмотрения алгебраических кривых, но и объясняет возможность или невозможность их рациональной параметризации, приводит к понятию рода римановой поверхности, который, в свою очередь, отвечает за топологию вещественных и комплексных кривых, элементарность абелевых интегралов...

О таких вещах необходимо говорить со школьниками! Необходимо подчёркивать, что математика — это прожектор, который высвечивает значительную часть картины мира, а не представляет собой набор несвязанных методов, или что это игра вроде шахмат.

И наконец, что касается логических пробелов при обучении, то просто надо стремиться к тому, чтобы их было поменьше. Сама по себе эта деятельность нам кажется очень полезной. Впрочем, как и во всём, и здесь уместно «чувство меры и сообразности». Степень погружения зависит от уровня класса. Однако обязательно надо придерживаться принципа Н. Н. Константинова о «честном умолчании»: если учитель в каком-то месте либо пропустил доказательство (умолчал), понимая, что ученики воспримут этот факт как нечто естественное и не вызывающее возражений, либо просто сослался на очевидность, то добавить строгое доказательство можно, *не разрушая структуры курса*.

Мотивировки

Математическое образование должно строго соблюдать принципы естественности (так сказать, «снежного кома»), т. е. необходимо давать только тот материал, который ляжет на уже усвоенный и который будет мотивирован. Перед тем как вводить новое понятие или начинать новый курс, нужно обязательно объяснять (хотя бы «на пальцах»), ради чего это делается. Отсутствие мотивировок вводимых понятий и направлений исследования недопустимо и не просто является разрывом, а делает такое «образование» бессмысленным. Спросите любого школьника, зачем нужны логарифмы или тригонометрические уравнения, и вы поймёте, что мы имеем в виду. И конечно, объяснения должны соответствовать уровню математической культуры слушателя. Л. Выготский, имея в виду только что сказанное, говорил про зоны ближайшего развития. Мы старались придерживаться этого правила и вводить такие классические понятия и теоремы, как китайскую теорему об остатках, функцию Эйлера, теорему Вильсона и прочие, мотивируя это необходимостью исследовать определённые явления, как, например, устройство колец остатков, периодичность геометрических прогрессий по модулю, разрешимость квадратных сравнений и другие.

Ничья земля

Образование похоже на освоение земель. Каждый чертит свою карту новой для него земли. Откуда берутся задачи? Сколько и каких задач надо решить, чтобы считать, что курс освоен? По всей видимости, наши ученики даже не думают об этом, хотя, казалось бы, здесь, как в туристическом походе, они должны постоянно спрашивать, долго ли осталось идти. И только тогда, когда основные реки, горы и равнины нанесены на карту (то есть когда не осталось больших пробелов — проблем), можно начинать осваивать другую территорию.

Ничья земля — это разделы математики вроде аффинной геометрии, проективной геометрии, геометрии Лобачевского, теории нефакториальных колец и т. д. На изучение этих разделов не хватает времени ни в школе, ни в вузе, но без них нельзя представить себе полноценного математического образования. Разрыв здесь состоит в том, что в школе формируют такие навыки, которые очень затрудняют их освоение. Такие разрывы мы называем блокировками.

Хороший способ устранения этих точек разрыва — исследовательские работы школьников. В добавлениях мы приводим работы, выполненные нашими учениками Данилой Байгушевым и Григорием Юргиным. Некоторые из них были опубликованы.

- *Байгушев Д. А.* Об асимптотике эргодических перестановок Арнольда // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 89–93.
- *Baygushev D.* On Geometry of Young Diagrams for Arnold Permutations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2012. Vol. 33, № 2. P. 109–114.
- *Байгушев Д. А.* О матричной функции Эйлера // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2012. Т. 45. С. 12–14.

В заключение, может быть, самое главное.

«Математика — это язык»

Язык науки, особенно язык математики, принципиальнейшим образом отличается от естественного, так сказать, бытового языка. Для естественного языка характерно наличие неоднозначности, т. е. наличие взаимоисключающих смыслов. В процессе восприятия естественной речи человек пользуется различными инструментами разрешения неоднозначности, такими как аналогии, апелляции к наглядным образам, но прежде всего контекстом. Поэтому естественно-языковые тексты информационно избыточны. Язык математики использует особый инструмент разрешения неоднозначности. В математическом тексте каждый (!) термин или понятие должны быть определены, что абсолютно исключает возможность неоднозначного их понимания.

На то, что математика — это совершенно особый язык, очень редко кто в школе обращает внимание, и, как правило, этому вообще не учат, хотя, может быть, математика включена в школьную программу именно для того, чтобы хотя бы с этим языком познакомиться или, что значительно лучше, научиться хоть немного на нём разговаривать. Преподаватели же вузов считают, что студенты им владеют свободно, и сразу начинают говорить с ними на незнакомом формальном языке, а бедные студенты не понимают, что происходит. В результате приходится просто зазубривать непонятные определения и доказательства теорем, что приводит к потере смысла образования.

Почти сто лет тому назад Эмиль Борель говорил, «что по существу образование ума при помощи точных знаний гораздо важнее, чем приобретение этих знаний, и что преподавание математики может получить полную воспитательную ценность лишь при условии, если оно будет избегать слишком распространённого *софизма*, будто реальные трудности можно разрешить с помощью простых словесных определений». Здесь мы хотим быть правильно понятыми и не перепугать тех, кто призывает учителей «быть реалистами и не пытаться научить строгим определениям и понятиям с самого начала». Конечно, о таких вещах, на наш взгляд, надо сначала просто рассказывать на уроках и не только не требовать, но и не ожидать немедленного понимания. Семя брошено в почву, надо подождать, пока оно прорастёт.

Как отметил В. А. Успенский, способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного следует неуклонно и ненавязчиво прививать уже с начальных классов школы. И не является ли это главным в школьном преподавании?

П. В. Бибиков, К. В. Козеренко, А. И. Малахов