## Перспектива

Каким мы видим окружающий нас мир? Далёкие объекты нам кажутся мелкими, близкие — крупными, железнодорожные рельсы — сходящимися к горизонту. На изображении куба рёбра не только не образуют прямых углов, но даже не параллельны. На фотографии высотного здания, сделанной с близкого расстояния, контуры ощутимо сжимаются.

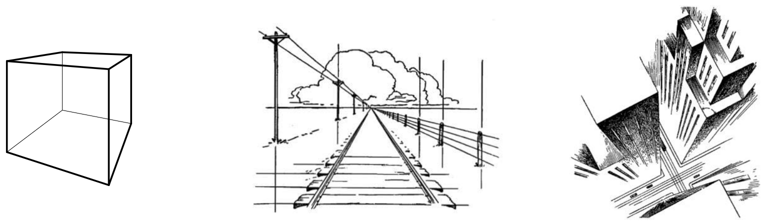


**Рис. 1**

Адекватной математической моделью, описывающей эти явления, является центральная проекция.

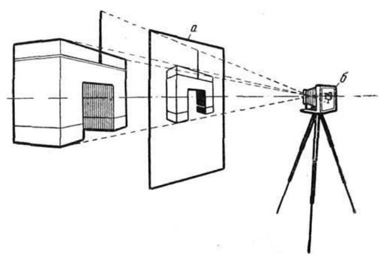



**Рис. 2**

Изучение центральной проекции, или перспективы, начали художники ещё в XIV–XV вв. Они хотели, чтобы изображение на холсте совпадало с тем, что мы реально видим. Очень скоро была решена задача построения так называемого перспективного изображения. Для этого были разработаны наборы эмпирических правил, составлены сборники внутрицеховых ремесленных рецептов. Потом за дело взялись математики, что привело к появлению проективной геометрии, про которую А. Кэли в конце XIX века сказал, что проективная геометрия — это вся геометрия.

Чтобы понять, как устроена перспектива, попробуем, например, изобразить на плоскости холста две параллельные прямые (рельсы, лежащие на земле). Главное требование: сделать так, чтобы лучи, про-

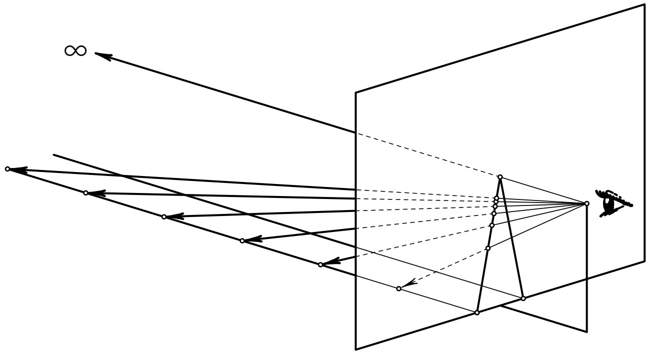



**Рис. 3**

ведённые от глаза к изображению на холсте, шли точно так же, как лучи, проведённые от глаза к двум лежащим на земле рельсам. Точка, в которой находится глаз, будет центром проекции. Проведём из неё прямые к точкам, лежащим на рельсах (рис. 3). Эти прямые пересекут плоскость картины, и точки пересечения образуют изображение рельсов. Однако прямые на изображении не будут параллельными. Они пересекутся в некоторой точке. Ясно, что эта точка на холсте не соответствует никакой точке на земле (рельсы, конечно, не пересекаются). В самом деле, луч, проходящий через точку пересечения прямых на холсте, параллелен земле и рельсам. Чтобы точка на холсте была как можно ближе к точке пересечения, соответствующая ей точка на рельсе должна уйти как можно дальше от плоскости холста. Чем дальше мы отодвигаем эту точку по рельсу, тем ближе её изображение к точке пересечения на холсте. Но попасть в эту «фиктивную» точку, очевидно, невозможно. Можно лишь подойти к ней как угодно близко, отодвигая точку на рельсе «в бесконечность».

Здесь мы построили центральную проекцию параллельных рельсов на плоскость картины. Центр проекции — глаз наблюдателя. Видно, что при центральной проекции параллельные прямые могут превратиться в пересекающиеся. При этом на картине возникает «точка схода», которой не соответствует никакая реальная точка.

Теперь совершенно ясно, откуда берётся стандартная фраза из книг по проективной геометрии: «Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке». Геометры XIX века, начиная с Ж. В. Понселе («Трактат о проективных свойствах фигур», 1822), добавляли к обычной евклидовой плоскости так называемые идеальные (бесконечно удалённые) элементы, не имея в виду при этом никакой геометрической интерпретации. Просто считалось, что эти виртуальные точки не видны, когда прямые параллельны, но при центральной проекции, как в примере с рельсами, могут переходить в обычные точки на плоскости. Сделать эту конструкцию логически непротиворечивой и формально корректной не так уж сложно — правда, для этого придётся выйти в трёхмерное пространство. Мы отложим пока формальное обоснование и примем наивную точку зрения.

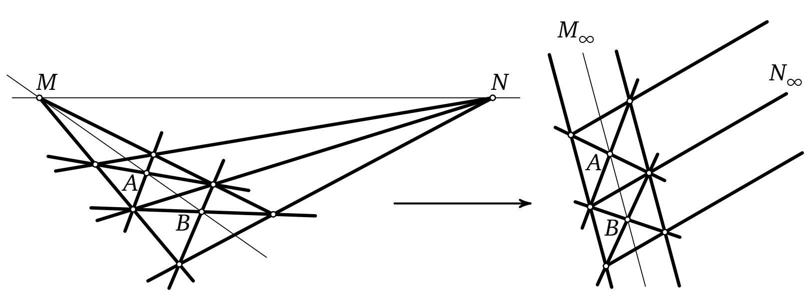
Итак, мы будем считать, что

1. К каждой прямой добавлена ровно одна бесконечно удалённая точка. В результате прямая становится замкнутой линией.
2. У параллельных прямых бесконечно удалённая точка одна и та же. Другими словами, все прямые, параллельные между собой, образуют «пучок с центром в бесконечно удалённой точке».
3. Все бесконечно удалённые точки лежат на бесконечно удалённой прямой (в теории перспективы — линия горизонта)

При этом важно понимать, что при помощи центральной проекции мы можем сделать бесконечно удалённые элементы видимыми или, наоборот, видимые точки «увести на бесконечность».

Для примера возьмём вот такую конфигурацию из девяти прямых (рис. 4 *а*).

Докажем, что точки $A$, $B$, $M$ лежат на одной прямой. Если пытаться это делать «в лоб», непосредственно по чертежу, видимо, потребуется несколько раз применить теорему Менелая. Но если посмотреть на чертёж как на изображение с рельсами и шпалами в перспективе, где $MN$ — линия горизонта, или, как говорят «увести прямую $MN$ на бесконечность», получая конфигурацию на рис. 4 *б*, всё становится понятно. Косые четырёхугольники превращаются в параллелограммы, а три прямые, сходящиеся в точке $M$, превращаются в три па-




*а*) *б*)

**Рис. 4**

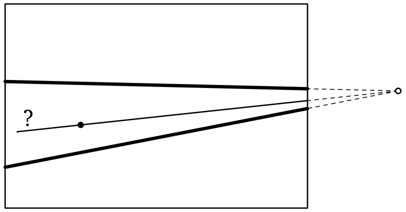



**Рис. 5**

раллельные, сходящиеся в бесконечно удалённой точке $M_\infty$. А уж параллельность этих трёх прямых без труда докажет любой школьник, изучивший свойства средней линии.

**Задача.** На листе бумаги изображена точка и две прямые, однако их точка пересечения лежит за пределами листа (рис. 5). Выполняя построения на этом листе, надо начертить прямую, которая проходит через данную точку и недоступную точку пересечения данных прямых. Оказывается, можно обойтись без циркуля, выполняя построения одной линейкой.

**Задача.** Перед вами изображение квадрата в перспективе (рис. 6). Как видите, параллельные стороны сходятся на линии горизонта. Используя этот квадрат как образец, продолжите изображение до паркета из одинаковых квадратных плиток. (Художники эпохи Возрождения умели это делать, ещё не зная проективной геометрии.)

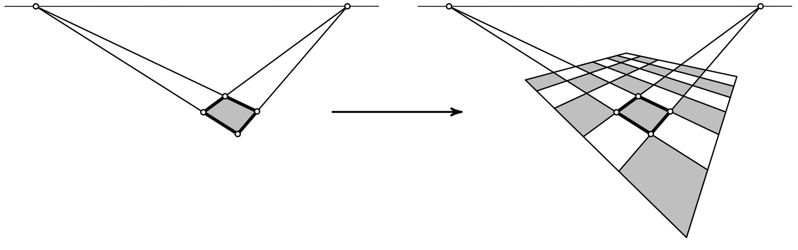


**Рис. 6**

## Формальный подход

Как это часто бывает в истории, логически аккуратное определение проективной прямой и проективной плоскости появилось гораздо позже, чем интуитивное понимание, что обычную евклидову плоскость можно каким-то образом расширить. У этой идеи были и сторонники, и противники.

Сторонники опирались на геометрическую наглядность, ведь художники уверенно изображали параллельные линии сходящимися на горизонте, чтобы плоское изображение выглядело объёмным. Должно быть математическое объяснение этого эффекта, и «точку схода» на перспективном изображении естественно считать изображением «бесконечно удалённой точки», в которой пересекаются параллельные прямые.

Противники справедливо замечали, что на той плоскости, которая описана в «Началах» Евклида, нет никаких бесконечно удалённых точек, а параллельные прямые не пересекаются по определению. К тому же непонятно, сколько таких виртуальных точек нужно добавить? Одну, две, несколько или бесконечно много? А если их бесконечно много, почему они лежат на одной прямой, хотя бы и бесконечно удалённой? Горизонт, между прочим, — замкнутая линия. А разве прямая замкнута?

На все эти вопросы отвечает формальное определение проективной плоскости. Задним числом понятно, почему оно появилось достаточно поздно. При всей логической строгости, это определение в достаточной мере абстрактно и лишено наглядности. Чтобы в нём разобраться, начнём с проективной прямой.

Рассмотрим полный набор (пучок) прямых, проходящих через одну точку $O$. Все эти прямые, конечно, нельзя нарисовать, поскольку прямые пучка заполняют всю евклидову плоскость. Но рассмотреть множество прямых, проходящих через точку $O$ (центр пучка), вполне возможно. Проведём теперь новую прямую $l$, не проходящую через центр, и рассмотрим точки её пересечения с прямыми, входящими в пучок. Мы видим, что она пересекает все прямые пучка, кроме одной. Лишь для одной прямой, параллельной $l$, не найдётся точки пересечения (рис. 7).

Это не удивительно, поскольку на евклидовой плоскости через точку $O$ проходит ровно одна прямая, параллельная прямой $l$. Каждый раз, проводя прямую $l$ по-новому, мы будем пересекать все прямые пучка,

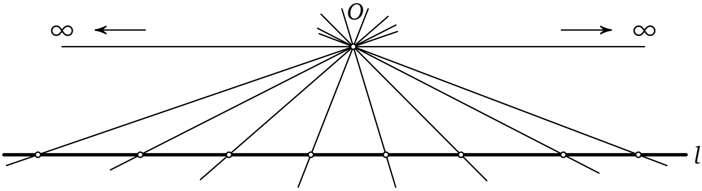



**Рис. 7**

кроме одной. Стало быть, каждой точке прямой $l$ соответствует ровно одна прямая пучка, которая через неё проходит, но для одной-единственной прямой пучка соответствующей точки на прямой $l$ нет.

Хочется сказать, что точек на прямой $l$ на одну меньше, чем прямых в пучке. Будь на прямой ещё одна дополнительная точка, всё сошлось бы: соответствие между прямыми пучка и точками прямой $l$ стало бы взаимно однозначным, а прямая стала бы замкнутой, как окружность. Заметьте, нам не нужны две отдельные точки для $+\infty$ и $-\infty$. Двигая точку по прямой как направо, так и налево, мы приближаем соответствующую прямую пучка к одной и той же прямой, параллельной $l$. Хватит и одной точки для $\pm\infty$. Только где же такую точку взять?

И тут мы делаем шаг, обычный для математики XIX века, но ещё немыслимый в веке XVII. Назовём пучок прямых *проективной прямой*. Просто дадим ему новое имя.

**Определение.** Проективная прямая — это пучок евклидовых прямых, проходящих через одну точку. Проективная точка — это одна прямая пучка.

А обычную прямую $l$, на которой не хватает одной точки, назовём *картой* для проективной прямой. На этой карте как раз не помещается ровно одна проективная точка (прямая из пучка, параллельная прямой $l$).

Проективную плоскость можно определить похожим образом. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через одну точку $O$ в трёхмерном евклидовом пространстве. Каждую такую прямую назовём *проективной точкой*. Подмножества в этом пучке, состоящие из прямых, лежащих в одной плоскости (плоские пучки), назовём по-прежнему *проективными прямыми*. А все проективные точки составляют *проективную плоскость*.

Ход рассуждений, приводящий к такому неочевидному определению, можно представить примерно так. Если мы хотим изображать один и тот же объект, например рельсы, на разных холстах, можно один раз выбрать центр проекции, провести из него прямые к точкам этих рельсов, а потом пересекать их то одной плоскостью, то другой, получая разные изображения на разных холстах. В этой конструкции главную роль играют именно прямые пучка, а выбор плоскости «холста» не имеет принципиального значения.

В проективной геометрии плоскость «холста», не проходящую через центр пучка $O$, принято называть *картой* проективной плоскости. Прямые пучка (проективные точки) пересекают карту, оставляя следы в виде точек. Плоскости (проективные прямые) оставляют на карте следы в виде прямых. Однако некоторые прямые пучка не пересекают карту. Все эти прямые лежат в одной плоскости, параллельной карте. А плоскость мы назвали проективной прямой. Вот и получилась бесконечно удалённая прямая, состоящая из бесконечно удалённых точек. С одним важным дополнением: бесконечно удалённых по отношению к данной карте.

Все прямые пучка (проективные точки) абсолютно равноправны. Отличаются они лишь расположением по отношению к выбранной карте. Проведём другую карту — и бесконечно удалёнными станут уже другие точки. Также мы потеряли и понятие параллельности: любые две плоскости (проективные прямые), проходящие через точку $O$, имеют общую прямую (проективную точку). На одной карте эти плоскости могут оставить параллельные следы (точка ушла в бесконечность), на другой — следы пересекаются. Но это зависит лишь от выбора карты. На проективной плоскости любые две прямые пересекаются в проективной точке.

На рис. 8 можно видеть, как две плоскости (проективные прямые) $\beta_1$, $\beta_2$ пересекают карту $\alpha$, оставляя параллельные следы — прямые $b_1$, $b_2$. А пересечение этих плоскостей (проективных прямых) — это прямая $b_\infty$, параллельная карте $\alpha$ (проективная точка, бесконечно удалённая по отношению к карте $\alpha$).

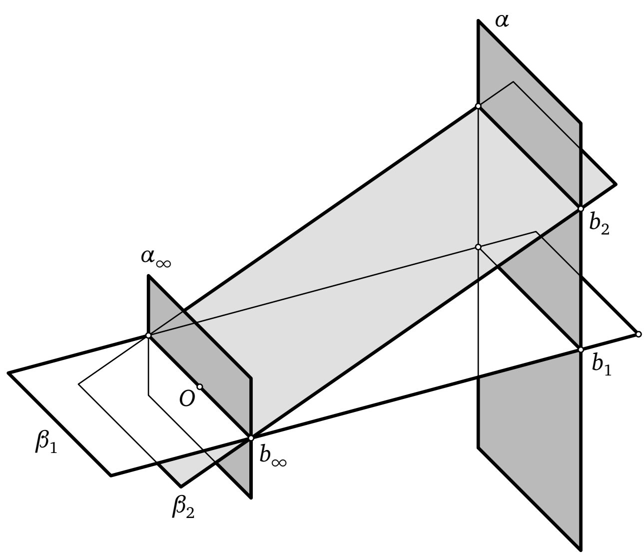



**Рис. 8**

Вот теперь всё встало на свои места. Наконец утверждение «параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке» можно считать вполне осмысленным и непротиворечивым.

В дальнейшем будем изображать чертежи на обычной евклидовой плоскости, в случае необходимости вспоминая, что в запасе есть ещё бесконечно удалённые точки.

**Задача.** Сколько надо карт, чтобы «увидеть» все проективные точки (чтобы каждая проективная точка была изображена хотя бы на одной карте)?

**Задача.** Прямая на любой карте изображается как прямая. Как на разных картах по-разному изобразится а) отрезок; б) внутренность треугольника?

**Задача.** На сколько частей делят проективную плоскость а) две прямые; б) три прямые?

## Гармоническая четвёрка точек

Важным инструментом в наших исследованиях станет гармоническая четвёрка точек. Она состоит из четырёх точек, лежащих на одной прямой. Не любых, конечно же, а расположенных особым образом. Точно так же и гармоническая четвёрка прямых состоит из четырёх прямых, проходящих через одну точку, опять расположенных особым образом. Казалось бы, какой смысл выделять какие-то особые расположения именно для четырёх точек или четырёх прямых? Дело в том, что, как мы увидим в дальнейшем, все тройки точек на проективной прямой в некотором смысле одинаковы. Поэтому будем рассматривать четвёрки.

Начнём с совсем простой задачи, доступной ученикам 5–6 класса. На прямой даны точки $A$ и $B$, надо построить на этой прямой такую точку $X$, чтобы она была в 3 раза ближе к точке $B$, чем к точке $A$. И в самом деле, это сделать очень просто. Делим отрезок $AB$ на 4 равные части и берём точку деления $X$, ближайшую к точке $B$ (рис. 9). Отрезок $AB$ поделился в отношении $3:1$, значит, точка $X$ в 3 раза

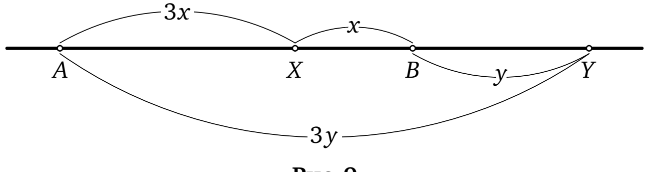



**Рис. 9**

ближе к точке $B$, чем к точке $A$, или $\frac{AX}{XB} = 3$. Всё? Конечно, нет. Есть и другая точка, назовём её $Y$, которая обладает тем же свойством, но лежит снаружи отрезка $AB$. Чтобы её построить, надо отложить за точку $B$ половину отрезка $AB$. Теперь расстояние $BY$ равно $\frac{1}{2}AB$, а расстояние $AY$ составляет $\frac{3}{2}AB$. Получается, что $\frac{AY}{YB} = 3$. Получили две точки $X$, $Y$, для которых $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$. Перед нами *гармоническая четвёрка точек ABXY*.

Конечно, отношение, равное именно 3, мы взяли лишь для примера. Теперь можно дать общее определение гармонической четвёрки точек (хотя в дальнейшем его придётся уточнить).

**Определение.** Четыре различные точки $A$, $B$, $X$, $Y$, лежащие на одной прямой, образуют *гармоническую четвёрку*, если $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$.

Также говорят, что пары точек $AB$ и $XY$ гармонически разделяют друг друга. Дело в том, что пропорции

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB} \quad \text{и} \quad \frac{XA}{AY} = \frac{XB}{BY}$$

эквивалентны (перемножьте накрест и убедитесь). Первая из них говорит о том, что точки $X$ и $Y$ делят отрезок $AB$ в одном и том же отношении, а вторая — о том, что точки $A$ и $B$ тоже делят отрезок $XY$ в одинаковых отношениях. При этом точки двух пар должны чередоваться.

**Задача.** Пусть две общие касательные к окружностям с центрами $A$ и $B$ пересекают прямую $AB$ в точках $X$ и $Y$ (рис. 10). Докажите, что $ABXY$ — гармоническая четвёрка (воспользуйтесь определением).

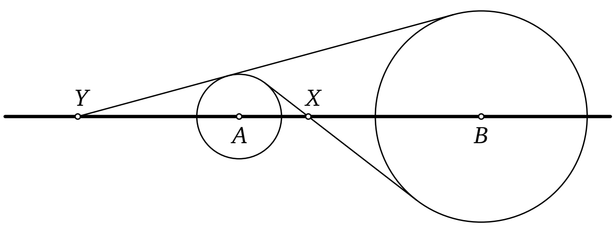



**Рис. 10**

Вот ещё один важный пример, который пригодится в дальнейшем. Построим на основании $AB$ какой-нибудь неравнобедренный треугольник $ABC$ и проведём через вершину $C$ две биссектрисы: внутреннюю и внешнюю (рис. 11). Пусть они пересекают прямую $AB$ в точ-

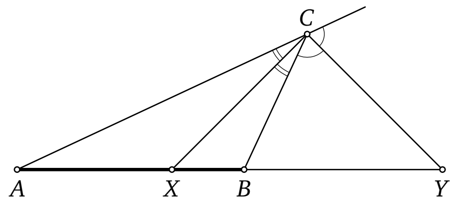



**Рис. 11**

ках $X$ и $Y$. По известному свойству биссектрисы

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB} \quad \text{и} \quad \frac{AY}{YB} = \frac{AC}{CB},$$

следовательно, $ABXY$ — гармоническая четвёрка. Запомните этот важный случай, его придётся часто использовать в дальнейшем.

## Двойное отношение

Какое отношение имеют гармонические четвёрки точек к центральной проекции и перспективе? Оказывается, они обладают одним важным и неочевидным свойством. Чтобы его сформулировать, зафиксируем точку $O$ — центр проекции — и проведём две произвольные прямые $l$ и $l'$. Возьмём теперь на прямой $l$ точку $A$ и проведём прямую $OA$ до пересечения с прямой $l'$ в точке $A'$ (рис. 12). Будем говорить, что точка $A'$ — образ точки $A$ при проекции прямой $l$ на прямую $l'$ с центром $O$. Оказывается, верна следующая теорема.

**Теорема.** *При центральной проекции прямой $l$ на прямую $l'$ гармоническая четвёрка $ABXY$ переходит в гармоническую четвёрку $A'B'X'Y'$.*

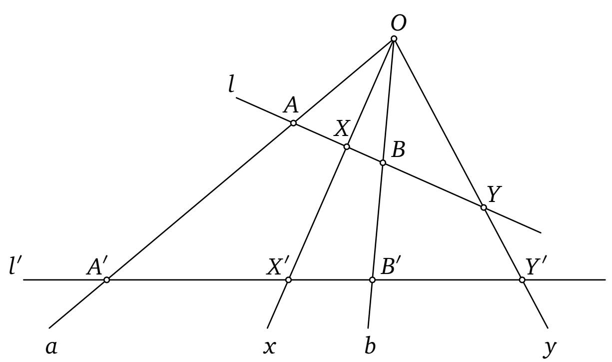



**Рис. 12**

Как это часто бывает, имеет смысл доказывать более общую теорему, к тому же эта общая теорема пригодится и в дальнейшем. Перепишем равенство $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$ в виде $\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = 1$ и рассмотрим величину $\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}$ для произвольных точек $ABXY$, лежащих на одной прямой. Эту величину называют *двойным отношением четырёх точек*. Впервые её рассмотрел Папп, последний великий геометр античности (III в. н. э.). Ему же принадлежит и теорема об основном инварианте центральной проекции.

**Теорема.** *При центральной проекции прямой $l$ на прямую $l'$ двойное отношение четырёх точек сохраняется*:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{A'X'}{X'B'} : \frac{A'Y'}{Y'B'}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим четыре точки $A, B, X, Y$, лежащие на одной прямой $l$, и четыре проходящие через них прямые $a, b, x, y$, принадлежащие одному пучку с центром $O$. Заменим теперь отношения отрезков на отношения площадей треугольников с вершиной $O$, поскольку высота у всех этих треугольников одна и та же:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{S(OAX)}{S(OXB)} : \frac{S(OAY)}{S(OYB)}.$$

С другой стороны, можно выразить площади треугольников по формуле

$$S(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle ab.$$

Тогда величины $OA$, $OB$, $OX$, $OY$ сократятся и отношение площадей окажется равным отношению синусов:

$$\frac{S(OAX)}{S(OXB)} : \frac{S(OAY)}{S(OYB)} = \frac{\sin \angle ax}{\sin \angle xb} : \frac{\sin \angle ay}{\sin \angle yb}.$$

Получается, мы выразили двойное отношение отрезков через «двойное отношение» синусов углов между четырьмя прямыми. Значит, пересекая эту четвёрку прямых новой прямой $l'$ или любой другой прямой, мы будем получать четвёрку точек с одним и тем же двойным отношением, равным двойному отношению четырёх синусов. Теорема доказана. □

В частности, гармоническая четвёрка при проекции переходит в гармоническую четвёрку. Это означает, что при любых построениях в перспективе гармоническая четвёрка остаётся гармонической.

Теперь можно дать парное определение.

**Определение.** Четыре различные прямые $a, b, x, y$, проходящие через одну точку, образуют *гармоническую четвёрку*, если

$$\frac{\sin\angle ax}{\sin\angle xb} = \frac{\sin\angle ay}{\sin\angle yb}.$$

На практике, конечно, гармоническую четвёрку прямых обычно получают, соединяя выбранный центр с гармонической четвёркой точек. Верно и обратное: пересекая гармоническую четвёрку прямых произвольной прямой, получаем в пересечении гармоническую четвёрку точек. Это — первый пример проективной двойственности, о которой мы поговорим немного позже. Заметим также, что, определив гармоническую четвёрку четырёх прямых, мы тем самым определили гармоническую четвёрку четырёх *проективных точек*.

Однако нам необходимо уточнить определение двойного отношения. Дело в том, что античная математика не знала отрицательных чисел, поэтому при использовании двойного отношения приходилось каждый раз указывать, лежат ли точки $X$, $Y$ на отрезке $AB$ или снаружи. Чтобы избежать этого неудобства, будем вместо отрезков рассматривать векторы и считать отношение $AX : XB$ положительным, если векторы $\overline{AX}$ и $\overline{XB}$ направлены в одну сторону, и отрицательным, если в разные.

Таким образом, введём обозначение для двойного отношения четырёх точек со знаком:

$$(ABXY) = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} : \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}.$$

Фиксируя три точки $A, B, X$, мы получаем для каждой точки $Y$ на проективной прямой единственное значение двойного отношения $(ABXY)$. Это означает, что мы ввели на прямой проективную систему координат, где каждой точке соответствует число. В частности, число можно сопоставить и бесконечно удаленной точке: если точка $Y$ такова, то мы считаем, что $\overline{AY}:\overline{YB}=-1$ (поскольку если точка $Y$ находится далеко от $A$, $B$ и $X$, то векторы $\overline{AY}$ и $\overline{YB}$ направлены в разные стороны, и чем точка $Y$ дальше, тем отношение длин $AY:YB$ ближе к единице). Проективная система координат принципиально отличается от привычных нам координат на прямой, поскольку точка $Y$ может быть и бесконечно удалённой, однако для этого случая на обычной координатной прямой никакого числа не существует. Заметим, что на евклидовой прямой система координат задаётся двумя точками, соответствующими числам 0 и 1. А вот на проективной прямой для задания системы координат нужны уже три точки.