Миниатюра 1

Числа Фибоначчи — быстрое вычисление

Числа Фибоначчи $F_0, F_1, F_2, \ldots$ определяются формулами $F_0=0$, $F_1=1$ и $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ при $n=0, 1, 2, \ldots$ Ясно, что можно вычислить F_n примерно за n арифметических операций.

Следующий приём позволяет сократить вычисления и использовать лишь порядка $\log n$ арифметических операций. Рассмотрим (2×2)-матрицу $M:=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix}F_{n+2}\\ F_{n+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix},$$

а значит, $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ (мы воспользовались ассоциативностью умножения матриц).

При $n=2^k$ можно вычислить M^n, несколько раз возводя матрицу в квадрат. Потребуется k умножений (2×2)-матриц. Произвольное n запишем в двоичном виде: $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_t}$, $k_1<k_2<\ldots<k_t$, а затем вычислим M^n по формуле $M^n=M^{2^{k_1}}M^{2^{k_2}}\ldots M^{2^{k_t}}$. Потребуется не более $2k_t\leqslant 2\log_2 n$ умножений (2×2)-матриц.

Замечания. Аналогичный приём можно применить к любой последовательности $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$, заданной рекуррентным соотношением $y_{n+k}=a_{k-1}y_{n+k-1}+\ldots+a_0y_n$, где k и $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ — константы.

При вычислении чисел Фибоначчи таким методом нужна аккуратность, поскольку F_n растёт очень быстро. Из формулы для F_n в миниатюре 2 можно видеть, что количество десятичных знаков в F_n имеет порядок n. Поэтому нужно использовать арифметику высокой точности, так что арифметические операции будут выполняться довольно медленно.

Литература

Этот приём хорошо известен, но до сих пор я не нашёл указаний на его происхождение.