Задания заключительных этапов (10–11 классы)

2020 год

Вариант 1

1. Найдите сумму цифр числа $A=2^{63}\cdot4^{25}\cdot5^{106}-2^{22}\cdot4^{44}\cdot5^{105}-1$.

2. В магазине продаются киндер-сюрпризы, содержащие ровно по 3 различных гномика, а всего разновидностей гномиков — 12. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причём в любых двух из них тройки гномиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному гномику всех 12 разновидностей?

3. Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x\leqslant\sin\operatorname{arctg}x$.

4. Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.

5. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел

$$x^3+3x+a-9\quad\text{и}\quad a+2^{5-x}-3^{x-1}$$

положительно.

6. Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть — плотным. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному — со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному — со скоростью 48 км/ч. Они начинают движение одновременно в начале той части трассы, которая покрыта рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Кто из них первым обгонит другого и на каком по счёту своём круге?

7. Куб с ребром $\sqrt{2+\sqrt3}$ освещается прожектором, выпускающим цилиндрический световой луч радиусом $\sqrt2$, ось которого совпадает с главной диагональю куба. Найдите площадь освещённой части поверхности куба.

8. Найдите наименьшее значение суммы $k+5m+n$ при условии, что m, n, k — различные натуральные числа, отличные от 1 и удовлетворяющие равенству

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}},$$

а число $\log_m n$ рационально.

Вариант 2

1. Найдите сумму цифр числа $B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1$.

2. В магазине продаются киндер-сюрпризы, содержащие ровно по 3 различных смурфика, а всего разновидностей смурфиков — 13. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причём в любых двух из них тройки смурфиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному смурфику всех 13 разновидностей?

3. Решите неравенство $\operatorname{tg} \arccos x \leqslant \cos \operatorname{arctg} x$.

4. Хорды AB и AC одной окружности с центром O равны между собой, а другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO, причём $BQ = 10$. Найдите AC.

5. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел

$$2^{x-2} - 3^{3-x} + a \quad \text{и} \quad a + 8 - x^3 - x$$

отрицательно.

6. Мотоцикл и квадроцикл едут по кольцевой дороге, четверть которой проходит по лесу, а остальная часть — по полю. Мотоцикл едет по лесу со скоростью 20 км/ч, а по полю — со скоростью 60 км/ч. Квадроцикл едет по лесу со скоростью 40 км/ч, а по полю — со скоростью 45 км/ч. Они начинают движение одновременно в начале той части дороги, которая идёт по лесу, и сначала едут по этой части. Кто из них первым обгонит другого и на каком по счёту своём круге?

7. Куб с ребром $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ освещается прожектором, выпускающим цилиндрический световой луч радиусом $\sqrt{2}$, ось которого совпадает с главной диагональю куба. Найдите площадь освещённой части поверхности куба.

8. Найдите наименьшее значение суммы $2k + m + 2n$ при условии, что m, n, k — различные натуральные числа, отличные от 1 и удовлетворяющие равенству

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}},$$

а число $\log_m n$ рационально.

2021 год

Вариант 1

1. Найдите сумму $f(1)+f(2)+\ldots+f(13)$, где $f(x)=4x^3-6x^2+4x+13$.

2. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

3. Найдите наименьшее значение a, при котором найдутся такие числа b и c, что каждое из двух уравнений $x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+a=1$ имеет по два целых корня, причём каждый из этих корней меньше -1.

4. Точки A и B движутся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях (одна по часовой стрелке, другая — против) соответственно по окружностям α и β одинакового радиуса, касающимся друг друга в точке K. В момент старта точки A и B находятся на луче, выходящем из центра окружности α и касающемся окружности β, а затем каждая из них начинает движение, приближаясь к точке K, и делает по своей окружности ровно один полный оборот за 1 час. Сколько времени в течение этого часа расстояние между точками A и B не меньше диаметра окружностей?

5. Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный круг, а из него — максимальный треугольник, подобный исходному. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$.

6. Найдите площадь поверхности неправильного тетраэдра $ABCD$ с рёбрами $AB=CD$ и $AD=BC$, если сумма его плоских углов при вершине A равна 180°, а площадь грани BCD равна s.

7. Докажите, что существует единственный набор натуральных чисел k, l, m, n, удовлетворяющий равенству

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021} = k\sqrt{3}+l\sqrt{5}+m\sqrt{7}+n\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

причём для него верны оценки

$$1-10^{-500}<\frac{n}{k}\sqrt{5\cdot 7}<1.$$

Вариант 2

1. Найдите сумму $f(1)+f(2)+\ldots+f(11)$, где $f(x)=4x^3+6x^2+4x+9$.

2. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-5|=2,\\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1\end{cases}$$

3. Найдите наименьшее значение a, при котором найдутся такие числа b и c, что каждое из двух уравнений $x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+a=-1$ имеет по два целых корня, причём каждый из этих корней больше 1.

4. Точки A и B движутся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях (одна по часовой стрелке, другая — против) соответственно по окружностям α и β одинакового радиуса, касающимся друг друга в точке K. В момент старта точки A и B находятся на луче, выходящем из центра окружности α и касающемся окружности β, а затем каждая из них начинает движение, удаляясь от точки K, и делает по своей окружности ровно один полный оборот за 2 часа. Сколько времени в течение этих 2 часов расстояние между точками A и B не больше диаметра окружностей?

5. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине и площадью 1 помещают в минимальный круг, а его — в минимальный треугольник, подобный исходному. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ\leqslant\alpha\leqslant 120^\circ$.

6. Найдите площадь поверхности неправильного тетраэдра $ABCD$ с рёбрами $AB=CD$ и $AD=BC$, если сумма его плоских углов при вершине A равна 180°, а площадь грани ABC равна s.

7. Докажите, что существует единственный набор натуральных чисел k, l, m, n, удовлетворяющий равенству

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}=k\sqrt{3}+l\sqrt{5}+m\sqrt{7}+n\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

причём для него верны оценки

$$1<\frac{m}{l}\sqrt{\frac{7}{5}}<1+10^{-500}.$$

Вариант 3

1. Решите уравнение $f(f(f(f(f(x))))) = 0$, где $f(x) = x^2 + 10x + 20$.

2. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}},$$

где

$$x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-2021}.$$

3. Сколько существует различных многочленов

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

с натуральными коэффициентами a, b, c, d, e, принимающих значения $P(-1) = 11$ и $P(1) = 21$?

4. Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по одной окружности. Если они едут в разных направлениях, то регулярно встречаются, причём расстояние (по прямой) между точками последовательных встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причём расстояние между точками последовательных обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 мин. Если же, наоборот, стоит мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 мин, но чаще, чем каждые 64 мин. Найдите радиус окружности.

5. К вертикальной плоской стене прислонили свежеокрашенный квадрат со стороной 1, опирающийся одной своей стороной на пол. Его кантовали (повернули на 90° вокруг одной из вершин, прижатой к полу) один раз, затем кантовали ещё раз и так далее (всего 4 раза), пока он не оказался стоящим на своей исходной стороне. При этом квадрат всё время прижимался к стене, и в результате некоторая её часть испачкалась в краске. Аналогичную процедуру проделали у другой стены с другим свежеокрашенным квадратом с диагональю 1, прокантовав его в общей сложности 7 раз. На сколько меньшая площадь оказалась испачканной у второй стены?

6. Найдите площадь поверхности неправильного тетраэдра $ABCD$, у которого суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна s.

7. На столе лежат 2021 красный и 2022 зелёных камня. Аня и Боря играют в следующую игру, делая ходы по очереди, причём Аня ходит первой: при очередном ходе игрок удаляет, по своему усмотрению, какое-нибудь число камней какого-нибудь одного цвета, являющееся делителем оставшегося числа камней другого цвета, а проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Вариант 4

1. Решите уравнение $f(f(f(f(f(x))))) = 0$, где $f(x) = x^2 + 6x + 6$.

2. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}},$$

где

$$x = 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021}.$$

3. Сколько существует различных многочленов

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

с натуральными коэффициентами a, b, c, d, e, принимающих значения $P(-1) = 8$ и $P(1) = 22$?

4. Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по одной окружности. Если они едут в разных направлениях, то регулярно встречаются, причём расстояние (по прямой) между точками последовательных встреч равно 4024 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причём расстояние между точками последовательных обгонов также равно 4024 м. Если велосипедист стоит, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 34 мин. Если же, наоборот, стоит мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 58 мин, но чаще, чем каждые 68 мин. Найдите радиус окружности.

5. К вертикальной плоской стене прислонили свежеокрашенный квадрат со стороной 1, опирающийся одной своей стороной на пол. Его кантовали (повернули на 90° вокруг одной из вершин, прижатой к полу) один раз, затем кантовали ещё раз и так далее (всего 4 раза), пока он не оказался стоящим на своей исходной стороне. При этом квадрат всё время прижимался к стене, и в результате некоторая её часть испачкалась в краске. Аналогичную процедуру проделали у другой стены с другим свежеокрашенным квадратом с полупериметром 1, прокантовав его в общей сложности 13 раз. На сколько меньшая площадь оказалась испачканной у второй стены?

6. Найдите площадь поверхности неправильного тетраэдра $ABCD$, у которого суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABC и ACD равна s.

7. На столе лежат 2021 красный и 2023 зелёных камня. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди, причём Петя ходит первым: при очередном ходе игрок удаляет, по своему усмотрению, какое-нибудь число камней какого-нибудь одного цвета, являющееся делителем оставшегося числа камней другого цвета, а проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

2022 год

Вариант 1

1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} \quad \text{или} \quad B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

2. На доске записаны последовательно в строку 2022 цифры, начиная с цифры 4. Любые две соседние цифры в этой записи образуют двузначное число, делящееся на 19 или на 23. Какова последняя цифра этой записи?

3. Найдите значение выражения $f(\ldots f(f(2022))\ldots)$, в котором функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

применяется 1303 раза.

4. Угол при вершине в осевом сечении данного конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиусом 3, каждый из которых касается ровно двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

5. Если числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будет называться *средним* из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t, \quad b = 2^t - 16, \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

6. Найдите все действительные значения параметра $a \in \mathbb{R}$, при которых наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (2 - a - a^2) \operatorname{tg}^2 x + (a^2 - 2a - 2) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$, принимает наименьшее значение. Каково это наименьшее значение?

7. Высота BH остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка M на отрезке AC выбирается так, чтобы угол BMO был наибольшим. Найдите HM, если $AH = 2$ и $HC = 3$.

Вариант 2

1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{или} \quad B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{79}{(39\cdot 40)^2}?$$

2. На доске записана последовательно в строку 2021 цифра, начиная с цифры 4. Любые две соседние цифры в этой записи образуют двузначное число, делящееся на 19 или на 23. Какова последняя цифра этой записи?

3. Найдите значение выражения $f(\ldots f(f(2022))\ldots)$, в котором функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

применяется 1304 раза.

4. Угол при вершине в осевом сечении данного конуса равен $60°$. Снаружи этого конуса расположены 13 одинаковых шаров радиусом 2, каждый из которых касается ровно двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

5. Если числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будет называться *средним* из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 81t, \quad b = 11^t - 121, \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

6. Найдите все действительные значения параметра a, при которых наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2) \operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$, принимает наименьшее значение. Каково это наименьшее значение?

7. Высота BH остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка M на отрезке AC выбирается так, чтобы угол BMO был наибольшим. Найдите HM, если $AH = 5$ и $HC = 3$.