

Предисловие

Это издание задачника выходит через 20 лет после предыдущего и через 40 лет после того, как Борис Михайлович Макаров предложил нам, его ученикам и младшим коллегам по кафедре, принять участие в создании коллекции нестандартных задач по анализу. Б. М. Макаров (1932—2020) — один из самых ярких профессоров кафедры математического анализа Ленинградского — Санкт-Петербургского университета. Более полувека он и его друг со студенческих лет В. П. Хавин продолжали и развивали традиции преподавания анализа, заложенные их знаменитыми предшественниками и учителями Г. М. Фихтенгольцем и И. П. Натансоном.

На протяжении долгой работы над книгой Борис Михайлович оставался нашим бессменным руководителем. Эта совместная работа стала для нас ещё одним этапом обучения у него. Он был душой проекта, квалифицированным и требовательным редактором и в то же время доброжелательным и заинтересованным соавтором. Значительная часть внесённых в это издание обновлений была предложена им или подробно обсуждалась с ним. Его интерес к книге сохранялся до последних дней жизни. Это, конечно, значительно облегчило нам подготовку нового издания. В то же время заключительная работа, уже без возможности обсудить или посоветоваться с Борисом Михайловичем, показала, сколь невозможным для нас его уход.

По сравнению с предыдущим изданием, структура книги практически не изменилась (лишь параграф «Ряды и преобразование Фурье» разбит на два). Учтены изменения, внесённые во французский перевод, выпущенный издательством Cassini в 2010 г. Добавлены несколько десятков задач. Во многом это оказалось возможным благодаря постоянному вниманию наших друзей и коллег, поддержка которых касалась не только новых интересных задач или лучших решений. Мы благодарны за сотрудничество О. Л. Виноградову, К. П. Кохасю, А. А. Флоринскому, Д. В. Фомину. Невозможно переоценить вклад Ф. Л. Назарова в это и предыдущее издания. Предложенные им задачи оригинальны и интересны, а его решения задач, в своё время вызвавших у нас затруднения, основаны на неожиданных и красивых идеях. Переводчик французского издания Э. Кури сделал полезные замечания, за что мы ему очень признательны. Наша отдельная благодарность К. П. Кохасю, который не только взял на себя хлопотную работу с иллюстрациями, но и придал всей книге нынешний вид.



* * *

Во второе издание задачника внесены существенные дополнения. Объём книги увеличился примерно в полтора раза. Это вызвано не только включением новых задач, но и заметным возрастанием доли указаний и решений. В связи с этим пополнился список литературы (отметим, в частности, что несколько задач мы позаимствовали из [Ар]). В интересах читателя, желающего получить дополнительную информацию, во многих случаях расширены указания на источники.

Мы признательны всем читателям, обратившим наше внимание на погрешности, допущенные в первом издании и в его переводе, опубликованном Американским математическим обществом. Мы благодарны нашим друзьям и коллегам — А. Б. Александрову, Е. А. Горину, В. В. Жуку, А. Н. Петрову, А. А. Флоринскому, А. И. Храброву, Н. В. Цилевич и С. М. Шиморину, сообщившим новые задачи и во многом способствовавшим улучшению текста. Особую благодарность мы выражаем К. П. Кохасю и Ф. Л. Назарову, которые не только предложили ряд красивых задач, но и во многих местах значительно усовершенствовали изложение, фактически взяв на себя труд по редактированию книги.

В заключение мы хотим отметить благотворное влияние В. П. Хавина как на содержание книги, так и на её судьбу.

2004 г.

* * *

Этот задачник предназначен в первую очередь студентам, желающим углубить свои знания по математическому анализу, и преподавателям, ведущим семинарские занятия и кружки на математических факультетах университетов. От обычно используемых задачников он отличается несколько большей трудностью задач, среди которых имеется ряд известных теорем анализа. Несмотря на это, для решения задач глав I—VII и §1 главы X не требуется особой подготовки, и в значительной части задачи доступны уже студентам первого курса во втором семестре. Все необходимые для решения этих задач сведения содержатся в стандартных университетских учебниках по математическому анализу, в частности в книгах В. А. Зорича [Зо], Л. Д. Кудрявцева [Ку], У. Рудина [Ру] и Г. М. Фихтенгольца [Ф]. Задачи глав VIII и IX и §2 главы X предъявляют несколько большие требования к уровню подготовки читателя и предполагают его знакомство с основными понятиями теории меры. Соответствующие сведения можно найти в последней главе упомянутого учебника У. Рудина и, в более полном виде, в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [КФ] и Б. З. Вулиха [Ву].

Содержание первых семи глав, включающих около двух третей всех задач, не выходит за рамки классических тем анализа (функции, производная, интеграл, асимптотика). Как здесь, так и в последующих главах мы не стремились к максимальной общности и, оказавшись перед необходимостью выбирать между более и менее общей формулировкой задачи, часто отдавали предпочтение последней. Главы VIII—X менее традиционны для задачника по анализу. Кроме вкусов авторов критерием при отборе материала для этих глав слу-

жила программа курса математического анализа, принятая в Ленинградском университете. Задачи, выходящие за её рамки и относящиеся к теории функций вещественной переменной (несмотря на всю условность этого разделения), в задачник не включались. Так, например, мы не использовали много привлекательных задач, решение которых опирается на теорему Лебега о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу. В книге также почти не нашли отражения задачи, связанные с комплексным анализом. Читателей, интересующихся этим кругом вопросов, мы отсылаем к широко известному сборнику Г. Поля и Г. Сегё [ПС] и к книге Е. Титчмарша [Т].

Мы стремились объединить задачи, посвящённые отдельным темам или методам, в циклы, в пределах которых можно было бы шаг за шагом исчерпать тот или иной круг вопросов с достаточной полнотой. Отчасти из-за этого нам не удалось избежать известной неоднородности в степени трудности соседних задач, которая на протяжении одного цикла может заметно возрастать. Поэтому нередко более трудные задачи сменяются сравнительно простыми, и читатель, не решив какой-либо задачи, не должен чувствовать себя обескураженным и вполне может надеяться на успех при решении последующих задач.

Краткие, а часто и подробные решения большинства задач приведены во второй части задачника. Однако мы рекомендуем читателю не торопиться использовать эту часть книги и не упускать шанс придумать лучшее решение, чем то, которое там приведено.

Литература по анализу и, в частности, учебники и сборники задач содержат необъятный материал, и мы думаем, что лишь немногие из предлагаемых задач могут претендовать на оригинальность. Мы видели нашу цель прежде всего в том, чтобы попытаться систематизировать и ввести в повседневный обиход задачи, содержащиеся (иногда в неявном виде) в труднодоступных (особенно для студентов) источниках, а также в математическом фольклоре. Искушённый читатель заметит наряду с традиционным материалом заимствования из «Математического просвещения», «American Mathematical Monthly», сборников [Ma], [P], [СГК], [СП], [СТ], [К] и др. Литературными ссылками задачи сопровождалась лишь в исключительных случаях.

Общее редактирование задачника осуществлялось Б. М. Макаровым.

Мы выражаем искреннюю благодарность нашим друзьям и коллегам — А. Б. Александрову, Д. А. Владимирову, Е. Д. Глускину, Ю. Г. Дуткевичу, В. В. Жуку, К. П. Кохасю, М. Ю. Любичу, Г. И. Натансону, А. В. Осипову, А. И. Плоткину, О. И. Рейнову, Б. А. Самокишу, С. В. Хрущёву и Д. В. Якубовичу, многочисленные советы и критические замечания которых оказали нам большую помощь. Мы обязаны им также рядом изящных задач.

В задачнике принята следующая система нумерации задач и ссылок. В пределах одной главы задачи нумеруются двумя числами, первое из которых обозначает номер параграфа, а второе — номер задачи в параграфе. При ссылках на задачу из другой главы сначала указывается (римской цифрой) номер главы. Например, задача VII.2.5 — это задача 2.5 из главы VII.