Глава I

Дифференцируемые функции

§ 1. Частные производные и приращение функции

1.1. Частные производные. Учитывая фундаментальное значение, которое имеет понятие производной при исследовании функций одной переменной, естественно стремиться распространить его в том или ином виде на функции нескольких переменных. Один из самых очевидных шагов в этом направлении — зафиксировать все координаты, кроме одной, и рассмотреть производную получающейся функции одной переменной. Опишем эту процедуру подробнее.

Пусть f — функция, определённая на содержащемся в $\mathbb{R}^m$ множестве X, $a = (a_1, \ldots, a_m)$ — внутренняя точка множества X. Тогда точки $a + h$ входят в X при всех h, достаточно малых по норме. Положим $h = te_k$, где $t \in \mathbb{R}$, а e_k $(k = 1, \ldots, m)$ — вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^m$. Зафиксировав все координаты, кроме k-й, рассмотрим соответствующее приращение функции

$$f(a + te_k) - f(a) =$$
$$= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m).$$

Определение. *Частной производной* функции f в точке a по k-й координате называется предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t}$$

(если он существует).

Как видно из определения, эта производная характеризует скорость изменения функции нескольких переменных по k-й координате. В дальнейшем мы, говоря о существовании частных производных, всегда будем предполагать, что они конечны, если иное специально не оговорено.

Для частной производной по координате x_k используются обозначения f'_{x_k} и $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$. Если координаты вектора обозначаются другими символами, то соответствующее обозначение переносится и на частную производную. В некоторых случаях, чтобы не связывать обозначения частной производной и координат вектора, для производной по k-й координате используется также символ $\partial_k f$.

Согласно определению частная производная функции f в точке a по k-й координате есть не что иное, как обычная производная в точке a_k функции

$$u \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \ldots, a_m),$$

определённой, очевидно, при всех u, достаточно близких к a_k. Поэтому при вычислении частных производных мы можем пользоваться обычными правилами дифференцирования суммы, произведения и частного. Например (мы считаем, что $x > 0$, $y > 0$),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)^z = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right)^z = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}.$$

Отметим простое, но важное свойство частных производных: они (как и обычные производные) перестановочны со сдвигами. Это означает, что

$$f'_{x_k}(x+c) = (f(x+c))'_{x_k}.$$

Подробнее: если в точке a существует частная производная $f'_{x_k}(a)$, то в точке $a-c$ существует частная производная по x_k «сдвинутой» функции

$$x \mapsto g(x) = f(x+c)$$

и эти производные равны. Например, $f'_{x_k}(c) = g'_{x_k}(0)$. Этим свойством, непосредственно вытекающим из определения частной производной, мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

1.2. Формула конечных приращений. Используя частные производные, можно получить обобщение важной формулы дифференциального исчисления — формулы Лагранжа[1] — для функций нескольких переменных. Как и в одномерном случае, в основном эта формула применяется, чтобы оценить приращение функции сверху. Позже, в п. 5.4, мы установим более удобное для этих целей неравенство Лагранжа. Ради краткости примем такое соглашение: будем говорить, что вектор $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_m)$ лежит между нулём и вектором $h = (h_1, \ldots, h_m)$, если каждая координата вектора $\widetilde{h}$ лежит между нулём и соответствующей координатой вектора h, т. е. $\widetilde{h}_1 = \theta_1 h_1, \ldots, \widetilde{h}_m = \theta_m h_m$, где $\theta_1, \ldots, \theta_m \in [0, 1]$.

[1] Жозеф Луи Лагранж (Lagrange, 1736—1813) — французский математик.

Теорема. *Пусть функция f определена в открытом параллелепипеде P, $P \subset \mathbb{R}^m$, во всех точках которого она имеет конечные частные производные по всем переменным. Тогда для любых точек a и $a+h$ из P, $h=(h_1, \ldots, h_m)$, справедливо равенство*

$$f(a+h)-f(a) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(a+h^{(k)})h_k, \tag{1}$$

где $h^{(1)}, \ldots, h^{(m)}$ — некоторые векторы, расположенные между нулём и h.

Равенство (1) будем называть *формулой конечных приращений.*

Доказательство. Представим приращение функции f в виде суммы её приращений, каждое из которых вызвано изменением лишь одной из координат аргумента:

$$f(a+h)-f(a) = \Delta_1 + \ldots + \Delta_m,$$

где (далее $e_1, \ldots, e_m$ — векторы канонического базиса)

$$\Delta_1 = f(a+h_1e_1) - f(a)$$

и

$$\Delta_k = f(a+h_1e_1+\ldots+h_ke_k) - f(a+h_1e_1+\ldots+h_{k-1}e_{k-1}) \quad \text{при } k>1.$$

Заменив в каждой разности Δ_k величину h_k переменной t, мы получим функцию

$$t \mapsto f(a+h_1e_1+\ldots+h_{k-1}e_{k-1}+te_k) - f(a+h_1e_1+\ldots+h_{k-1}e_{k-1}),$$

приращение которой на промежутке с концами 0 и h_k равно Δ_k. Согласно классической теореме Лагранжа о среднем

$$\Delta_k = f'_{x_k}(a+h_1e_1+\ldots+h_{k-1}e_{k-1}+\theta_k h_k e_k)h_k$$

при некотором $\theta_k \in (0, 1)$. Таким образом,

$$f(a+h)-f(a) = \sum_{k=1}^{m} \Delta_k = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(a+h^{(k)})h_k,$$

где

$$h^{(1)} = \theta_1 h_1 e_1 \quad \text{и} \quad h^{(k)} = h_1e_1+\ldots+h_{k-1}e_{k-1}+\theta_k h_k e_k \quad (k>1)$$

— векторы, расположенные между нулём и h. □

Отметим частный случай формулы (1), относящийся к функциям двух переменных:

$$f(x+u, y+v) - f(x, y) = f'_x(x+\theta_1 u, y)\,u + f'_y(x+u, y+\theta_2 v)\,v \tag{1'}$$

для некоторых $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$.

1.3. Критерий постоянства функции. Приведём важное следствие из доказанной теоремы.

Следствие. *Функция f, имеющая во всех точках области $\mathcal{O}$ конечные частные производные по всем координатам, постоянна в $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда все её частные производные обращаются в нуль всюду в $\mathcal{O}$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = 0 \quad \textit{при всех } x \textit{ из } \mathcal{O}.$$

Доказательство. Необходимость приведённого условия очевидна. Докажем его достаточность.

Поскольку все частные производные функции f равны нулю в $\mathcal{O}$, из формулы конечных приращений следует, что f постоянна вблизи каждой точки из $\mathcal{O}$. Так как $\mathcal{O}$ — связное множество, нам остаётся сослаться на предложение 0.11 о локально постоянных функциях. ☐

Замечание. В дальнейшем нам потребуется и чуть более общий результат, когда нулевыми оказываются не все частные производные, а только часть из них. В этом случае естественно ожидать, что функция не зависит от соответствующих переменных. Однако это верно не в любой области $\mathcal{O}$ (см. упражнение 2). Вместе с тем такой вывод верен, если она выпукла. Действительно, не умаляя общности, будем считать, что частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$, $1 \leqslant n < m$, тождественно равны нулю в $\mathcal{O}$. Зафиксировав остальные переменные, мы получим функцию, заданную в связной (даже выпуклой) области (в n-мерном сечении множества $\mathcal{O}$), у которой все частные производные равны нулю. Согласно уже доказанному следствию она постоянна. Поэтому значения функции f определяются лишь переменными $x_{n+1}, \ldots, x_m$.

1.4. Условие Липшица. Здесь мы убедимся, что функция с ограниченными частными производными удовлетворяет (как и в одномерном случае) условию Липшица (см. п. 0.9).

Теорема. *Пусть у определённой в открытом параллелепипеде P функции f всюду в P существуют частные производные по всем координатам. Если они ограничены в P, то f удовлетворяет в P условию Липшица порядка* 1.

Доказательство. По условию при некоторых $C_1, \ldots, C_m$ справедливы неравенства

$$|f'_{x_1}(x)| \leqslant C_1,\ |f'_{x_2}(x)| \leqslant C_2, \ldots,\ |f'_{x_m}(x)| \leqslant C_m \quad \text{для всех } x \text{ из } P.$$