

Предисловие

Эта книга адресована прежде всего учащимся, желающим познакомиться с теорией гладких функций и отображений в объёме, примерно соответствующем программе университетского курса, а также преподавателям математического анализа.

Книга написана на основе лекций, которые авторы много лет читали на математико-механическом факультете СПбГУ. Материал трёх первых глав соответствует несколько расширенной программе первой половины третьего семестра. Он предполагает, что читатель, кроме начал дифференциального исчисления, знаком с основными фактами теории непрерывных отображений в евклидовых пространствах, которые для полноты изложены во введении (частично с доказательствами). Мы также исходим из того, что читатель знаком с основными сведениями из курса линейной алгебры. Необходимый нам примыкающий к этому кругу вопросов простой материал для удобства чтения приведён в заключительных пунктах введения.

Первая глава посвящена (за исключением последнего параграфа) традиционным темам теории гладких функций: дифференцируемость, формула Тейлора, исследование на экстремум, неявные функции.

При изложении теории гладких отображений (прежде всего в гл. II) мы стремились подчеркнуть роль теоремы об открытом отображении, опираясь в случаях, допускающих альтернативу, именно на неё. Хотя это можно было бы сделать значительно раньше, мы сознательно отложили обсуждение относительного экстремума в конец третьей главы, чтобы воспользоваться понятием многообразия и дать читателю возможность представить геометрическую картину и оценить роль предположения о максимальности ранга функциональной матрицы, соответствующей уравнениям связи.

Стремясь восполнить некоторые пробелы в учебной литературе, мы включили в книгу ряд нетрадиционных разделов. К ним относится прежде всего круг вопросов, связанных с теоремой Уитни о гладком продолжении функций, в том числе теорема Стейна об областях с минимально гладкой границей (§ I.11). Эти и некоторые другие разделы (восходящая к Адамару теорема о диффеоморфизме (§ II.5) и др.) отмечены знаком (*) и при первом чтении могут быть опущены.

Главы I—III содержат более 150 примеров и упражнений, которые служат существенным дополнением к основному материалу.

Четвёртая глава книги по своему характеру значительно отличается от предыдущих. Здесь мы рассматриваем важный, но более специальный вопрос о массивности множества критических значений гладкого отображения. Материал этой главы (теоремы Морса, Сарда, Федерера), конечно, не относится к общему курсу, но может быть положен в основу специальных курсов и семинаров. Он предполагает большую подготовленность читателя, в частности его знакомство с основными фактами теории меры (в этой главе используются понятия меры Хаусдорфа и хаусдорфовой размерности; в необходимом нам объёме эти сведения приведены в § 3—5 гл. V).

Последняя, пятая, глава представляет собой добавление. В нём собраны (как правило, с доказательствами) некоторые необходимые по ходу дела факты, тематика которых выходит за рамки книги. Параграфы 1—2 используются в § I.11, а остальные — в гл. IV.

В течение всей работы над книгой мы ощущали постоянную поддержку своих коллег по кафедре математического анализа, которым мы искренне благодарны. Чрезвычайно полезной была тщательная работа редактора книги О. Л. Виноградова, благодаря которой удалось устранить многочисленные недочёты. А. Б. Александров прочитал один из первых вариантов книги, и его благожелательная реакция очень ободрила нас. Кроме разнообразной внепрофессиональной помощи, благотворно сказавшейся на судьбе книги, К. П. Кохась создал электронные версии всех рисунков, реализуя наши (не всегда отчётливые) пожелания, и в некоторых случаях благодаря его предложениям иллюстрации оказались выразительнее, чем мы могли надеяться. Материал книги, особенно относящийся к последним двум главам, неоднократно обсуждался нами с А. А. Флоринским. Мы высоко ценим сотрудничество этих наших коллег. И отдельная благодарность — нашему коллеге и другу Ф. Л. Назарову, советы которого позволили в некоторых местах существенно усовершенствовать изложение. Ему, в частности, принадлежит доказательство леммы 2 из п. V.5.3, которое приводится в книге с его согласия. Наконец, но не в последнюю очередь, мы хотим поблагодарить Н. В. Цилевич, поддержка и советы которой были нам очень полезны.

Главы книги (кроме введения) нумеруются римскими цифрами. Они разбиты на параграфы, состоящие, в свою очередь, из пунктов, которые нумеруются двумя арабскими цифрами. Первая из них

обозначает номер параграфа, а вторая — номер пункта в параграфе. Все утверждения, содержащиеся в данном пункте, нумеруются при ссылках так же, как и пункт. При ссылках внутри одной главы указывается только номер пункта (например, ссылка «по теореме 2.1» означает ссылку на теорему пункта 2.1 данной главы). При ссылках на утверждения из другой главы дополнительно указывается её номер (например, ссылка «см. лемму III.2.3» означает ссылку на лемму, содержащуюся в п. 2.3 гл. III). Нумерация формул сплошная в пределах параграфа. Окончание доказательства отмечается знаком \square .

С.-Петербург, апрель 2019 г.