

Оглавление

Предисловие	8
Основные обозначения	11
Введение. Предварительные сведения	13
0.1. Пространство \mathbb{R}^m (13). 0.2. Открытые и замкнутые множества (15). 0.3. Предел последовательности в \mathbb{R}^m (18). 0.4. Теорема Линделёфа (20). 0.5. Компактные множества (21). 0.6. Предел отображения (23). 0.7. Непрерывность (25). 0.8. Непрерывность на компактном множестве (28). 0.9. Равномерная непрерывность (30). 0.10. Непрерывность обратного отображения (32). 0.11. Связность (33). 0.12. Выпуклые множества в \mathbb{R}^m (35). 0.13. Линейные отображения евклидовых пространств (37). Упражнения (41).	
Глава I. Дифференцируемые функции	44
§ 1. Частные производные и приращение функции	44
1.1. Частные производные (44). 1.2. Формула конечных приращений (45). 1.3. Критерий постоянства функции (47). 1.4. Условие Липшица (47). Упражнения (48).	
§ 2. Определение дифференцируемой функции	48
2.1. Дифференцируемость (48). 2.2. Необходимые условия дифференцируемости (51). 2.3. Достаточные условия дифференцируемости (52). 2.4. Градиент (53). Упражнения (54).	
§ 3. Производная по направлению	55
3.1. Производная вдоль вектора (55). 3.2. Вычисление производной вдоль вектора (55). 3.3. Бескоординатное описание градиента (57). Упражнения (58).	
§ 4. Касательная плоскость к поверхности уровня	59
4.1. Множества уровня (59). 4.2. График как множество уровня (61). 4.3. Касательная плоскость (62). Упражнения (64).	
§ 5. Дифференцируемые отображения	65
5.1. Определение дифференцируемости (65). 5.2. Матрица Якоби (67). 5.3. Дифференцирование композиции (69). 5.4. Неравенство Лагранжа (72). 5.5. Дифференцируемость обратного отображения (74). Упражнения (77).	
§ 6. Производные высших порядков	79
6.1. Определения и обозначения (79). 6.2. Перестановка двух дифференцирований (82). 6.3. Гладкие функции и отображения (84).	

6.4. Теорема о равенстве смешанных производных произвольного порядка (84).	
6.5. Арифметические действия с гладкими функциями (87).	
6.6. Композиция гладких отображений (88).	
6.7. Функции дробной гладкости (89). Упражнения (90).	
§ 7. Многочлены от нескольких переменных и дифференциалы высших порядков	91
7.1. Многочлены от нескольких переменных (92).	
7.2. Дифференциалы высших порядков (94). Упражнения (97).	
§ 8. Формула Тейлора	97
8.1. Предварительные сведения (97).	
8.2. Формула Тейлора для функций нескольких переменных (102).	
8.3. Ещё одна оценка остатка (106).	
8.4. Характеристическое свойство многочленов Тейлора (109). Упражнения (111).	
§ 9. Экстремумы функций нескольких переменных	112
9.1. Необходимое условие экстремума (112).	
9.2. Уточнённое необходимое условие экстремума (113).	
9.3. Достаточные условия экстремума (115).	
9.4. Об отыскании наибольшего и наименьшего значений функций нескольких переменных (118). Упражнения (123).	
§ 10. Неявная функция	124
10.1. Постановка задачи (125).	
10.2. Существование и непрерывность неявной функции (127).	
10.3. Гладкость неявной функции (129).	
10.4. Роль градиента функции F (133). Упражнения (134).	
§ 11*. Теорема Уитни о продолжении	136
11.1. Постановка задачи и предварительный результат (136).	
11.2. Теорема Уитни о гладком продолжении функции (140).	
11.3. Доказательство теоремы Уитни (141).	
11.4. О сохранении степени гладкости старших производных (146).	
11.5. Продолжение со вполне связных множеств (151).	
11.6. Множества с минимально гладкой границей (156). Упражнения (159).	
Глава II. Гладкие отображения	161
§ 1. Теоремы об открытом отображении и о диффеоморфизме	161
1.1. Теорема об открытом отображении (161).	
1.2. Теорема об открытом отображении (продолжение) (163).	
1.3. Теорема о диффеоморфизме (165).	
1.4. Гладкость обратного отображения (166). Упражнения (166).	
§ 2. Теоремы о локальной обратимости и о зависимости функций	167
2.1. Локальная обратимость (167).	
2.2. Теорема о частичном обращении (168).	
2.3. Продолжение до диффеоморфизма (172).	
2.4. Зависимость и независимость функций (173). Упражнение (176).	

§ 3. Криволинейные координаты и замена переменных	176
3.1. Криволинейные координаты (176). 3.2. Примеры криволинейных координат (177). 3.3. Частные производные в криволинейных координатах (182). Упражнения (186).	
§ 4. Классификация гладких отображений	187
4.1. Эквивалентность гладких отображений (187). 4.2. Теорема о ранге (189).	
§ 5*. Теорема о глобальной обратимости	191
5.1. Предварительные замечания (191). 5.2. Накрытия и их свойства (191). 5.3. Основной результат (193). Упражнение (195).	
§ 6*. Лемма Морса	195
6.1. Единообразное приведение близких квадратичных форм к каноническому виду (195). 6.2. Правило Лейбница (197). 6.3. Лемма Адама-ра (198). 6.4. Основной результат (199).	
Глава III. Теорема о неявном отображении и её приложения	202
§ 1. Неявные отображения	202
1.1. Постановка задачи (202). 1.2. Теорема о неявном отображении (205). 1.3. Заключительные замечания (207). Упражнение (208).	
§ 2. Гладкие многообразия	208
2.1. Определения и обозначения (208). 2.2. Эквивалентные описания гладкого многообразия (212). 2.3. Касательное подпространство (214). 2.4. Примеры (217). Упражнения (222).	
§ 3. Относительный экстремум	223
3.1. Наводящие соображения и постановка задачи (223). 3.2. Необходимое условие относительного экстремума (229). 3.3. Функция и метод Лагранжа (230). 3.4. Примеры использования метода Лагранжа (231). 3.5. Достаточные условия относительного экстремума (238). 3.6. Условие отсутствия относительного экстремума (241). Упражнения (245).	
Глава IV. Критические значения гладких отображений	247
§ 1*. Постановка задачи и формулировка основного результата	247
1.1. Критические точки и критические значения (247). 1.2. Основная теорема (248). 1.3. Критические значения отображений класса C^1 (250).	
§ 2*. Правильно расположенные многообразия	252
2.1. Основное определение (253). 2.2. Две леммы о приращениях (254).	
§ 3*. Теорема Морса о t -представлении	257
3.1. Предварительные соображения (257). 3.2. t -представления (260). 3.3. Существование t -представления (262).	

§ 4*	Основные результаты	266
	4.1. Доказательство основной теоремы (266). 4.2. Обобщение на липшицевы отображения (271).	
§ 5*	Точность условий основной теоремы	274
	5.1. Предварительные замечания (274). 5.2. Множества канторова типа (275). 5.3. Построение вспомогательной функции (276). 5.4. Вспомогательная функция (продолжение) (280). 5.5. Контрпримеры функций нескольких переменных с предельно высокой гладкостью (283). 5.6. Контрпримеры отображений в случае $n \geq m$ (285). 5.7. Контрпримеры отображений в случае $m > n$ (287).	
§ 6*	Пример Уитни	290
	6.1. Постановка задачи и основной результат (290). 6.2. Множества \mathcal{C}_a^2 (290). 6.3. Построение дуги (292). 6.4. Построение функции (295). 6.5. Доказательство неравенства (4) (297). 6.6. Обобщение на случай многих переменных (298).	
Глава V. Добавления		300
§ 1*	Гладкие разбиения единицы	300
	1.1. Вспомогательные неравенства (300). 1.2. Теорема о разбиении единицы (301).	
§ 2*	Теоремы о покрытиях шарами	305
	2.1. Предварительная теорема (306). 2.2. Теорема Витали (307). 2.3. Точки плотности (309).	
§ 3*	Меры Хаусдорфа и хаусдорфова размерность	311
	3.1. Внешние меры (311). 3.2. Построение мер Хаусдорфа (312). 3.3. Простейшие свойства мер Хаусдорфа (313). 3.4. Связь с мерой Лебега (316). 3.5. Хаусдорфова размерность (317). 3.6. Мера и размерность Хаусдорфа множеств канторова типа (318). 3.7. Канторова функция, соответствующая множеству \mathcal{C}_a (321).	
§ 4*	Сравнение мер $\mu_p \times \mu_q$ и μ_{p+q}	323
	4.1. Верхняя оценка (323). 4.2. Оценка $\mu_p \times \mu_q$ сверху (324). 4.3. Оценка $\mu_p \times \mu_q$ снизу (327). 4.4. Стандартные множества (329). 4.5. Хаусдорфова размерность декартова произведения (330).	
§ 5*	Леммы, связанные с мерой	331
	5.1. Оценка хаусдорфовой меры образа (332). 5.2. О нулевой мере образа (333). 5.3. Уточнение оценки приращения (334).	
	Литература	338
	Именной указатель	339
	Предметный указатель	340