

Предисловие

*Нашему учителю,
ВЛАДИМИРУ АНДРЕЕВИЧУ УСПЕНСКОМУ*

Предлагаемая вашему вниманию книга написана по материалам лекций для младшекурсников, которые читались авторами в разные годы на механико-математическом факультете МГУ. (В эту серию также входят книги «Начала теории множеств» и «Вычислимые функции».)

Центральная идея математической логики восходит ещё к Лейбницу и состоит в том, чтобы записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам. При этом правильность рассуждений можно проверять механически, не вникая в их смысл.

Усилиями большого числа математиков и логиков второй половины XIX и первой половины XX века (Буль, Кантор, Фреге, Пеано, Рассел, Уайтхед, Цермело, Френкель, Гильберт, фон Нейман, Гёдель и другие) эта программа была в основном выполнена. Принято считать, что всякое точно сформулированное математическое утверждение можно записать формулой теории множеств (одной из наиболее общих формальных теорий), а всякое строгое математическое доказательство преобразовать в формальный вывод в этой теории (последовательность формул теории множеств, подчиняющуюся некоторым простым правилам). В каком-то смысле это даже стало определением: математически строгим считается такое рассуждение, которое можно перевести на язык теории множеств.

Так что же, теперь математики могут дружно уйти на пенсию, поскольку можно открывать математические теоремы с помощью компьютеров, запрограммированных в соответствии с формальными правилами теории множеств? Конечно, нет, причём сразу по нескольким причинам.

Начнём с того, что машина, выдающая с большой скоростью математические теоремы (и их доказательства), хотя и возможна, но бесполезна. Дело в том, что среди этих верных утверждений почти все будут неинтересными. Формальная логика говорит, какие правила надо соблюдать, чтобы получать верные результаты, но не говорит, в каком порядке их надо применять, чтобы получить что-то интересное.

Казалось бы, мы можем запустить машину и ждать, пока она не докажет интересующее нас утверждение (пропуская все остальные). Проблема в том, что формальное доказательство сколько-нибудь содержательной теоремы настолько длинно, что прочесть его человек не в состоянии. Представьте себе доказательство, которое состоит из миллионов формально правильных шагов, в котором мы можем проверить каждый отдельный шаг, но так и не понимаем, что происходит — много ли в нём проку?

На самом деле прок всё-таки есть: мы узнаём, что доказываемое утверждение верно, хотя так и не понимаем, почему. Так что и такая машина была бы полезна. Увы, и этого сделать не удаётся, поскольку на поиск доказательства сколько-нибудь сложного утверждения известными сейчас методами требуется астрономически большое время (даже если представить себе, что машина работает с предельно возможной по законам физики скоростью).

Можно умерить амбиции и поставить задачу попроще: пусть машина проверяет доказательства, записанные человеком по правилам формальной логики. Если машина не может помочь нам что-то открыть, пусть она хотя бы проверит, не пропустили ли мы какого-то шага рассуждения.

Из всех перечисленных задач эта выглядит наиболее реалистичной. К сожалению, пока что работы и в этом направлении не ушли далеко: формальная запись доказательства в виде, пригодном для машинной проверки, является долгим и скучным делом, на которое у большинства математиков не хватает энтузиазма и терпения. А разработать удобные средства такой записи пока не удалось.

Короче говоря, революционная программа Лейбница построения формальных оснований математики осуществилась, но незаметно: под здание математики подвели новый (и довольно прочный) фундамент, но большинство жильцов про это до сих пор не знают.

Так что же, математическая логика бесполезна? Ни в коем случае: она не только удовлетворяет естественный философский интерес к основаниям математики, но и содержит множество красивых результатов, которые важны не только для математики, но и для computer science.

В этой книжке мы расскажем об одном из центральных понятий математической логики — языках и исчислениях первого порядка. В этих языках используются логические связки «и», «или», «если... то...», а также кванторы «для всех» и «существует». Оказывается, что этих средств достаточно для формализации математических

теорий и что можно построить простые формальные правила, полностью отражающие смысл этих логических средств.

Авторы пользуются случаем ещё раз поблагодарить своего учителя, Владимира Андреевича Успенского, лекции, тексты и высказывания которого повлияли на них (и на содержание этой книги), вероятно, даже в большей степени, чем авторы это осознают.

При подготовке текста использованы записи А. Евфимьевского и А. Ромащенко (который также прочёл предварительный вариант книги и нашёл там немало ошибок).

Оригинал-макет книги был подготовлен В. В. Шуваловым; без его настойчивости (вплоть до готовности разделить ответственность за ошибки) оригинал-макет вряд ли появился бы к какому-либо сроку. Он же вместе с М. А. Ушаковым (нашедшим несколько существенных ошибок) подготовил предметный указатель. Мы признательны также К. С. Макарычеву и Ю. С. Макарычеву, которые внимательно прочли верстку книги и нашли там немало опечаток.

Авторы признательны *École Normale Supérieure de Lyon* (Франция) за поддержку и гостеприимство во время написания этой книги.

Первое издание книги стало возможным благодаря Российскому фонду фундаментальных исследований, а также И. В. Яценко, который уговорил авторов подать туда заявку.

Наконец, мы благодарим сотрудников, аспирантов и студентов кафедры математической логики мехмата МГУ (особая благодарность — М. Р. Пентусу, указавшему два десятка опечаток), а также всех участников наших лекций и семинаров и читателей предварительных вариантов этой книги.

В третьем издании добавлены формулировка и доказательство теоремы Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов (по ошибке отсутствовавшие в предыдущих изданиях), а также дополнена информация в именованном указателе. В четвёртом издании, помимо изменения формата верстки и использования шрифтов ЛН, исправлены некоторые опечатки (на которые нам любезно указали Н. Маслов, А. Гусаков, В. Патков).

Просим сообщать о всех ошибках и опечатках авторам (электронные адреса `ver at mscme dot ru`, `nikolay dot vereshchagin at gmail dot com`; `sasha dot shen at gmail dot com`, `alexander dot shen at lirmm dot fr`; почтовый адрес: Москва, 119002, Большой Власьевский пер., 11, Московский центр непрерывного математического образования).

Н. К. Верецагин, А. Шень