

# Предисловие

Под линейным программированием понимается раздел теории оптимизации, в котором изучаются задачи минимизации или максимизации линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных равенств и неравенств. Линейное программирование возникло под влиянием прикладных технико-экономических задач в 30—40-х гг. XX в. и, благодаря трудам Дж. фон Неймана, Л. В. Канторовича, Дж. Данцига и многих других известных математиков, превратилось в самостоятельное направление математики и продолжает развиваться в настоящее время. Линейному программированию посвящена обширная литература, и читатель вправе спросить, что оправдывает появление еще одной книги в этой области, чем она отличается от других подобных книг.

Первое отличие — мы даем строгое изложение основ теории линейного программирования с привлечением минимального математического аппарата, опираясь лишь на самые элементарные понятия из линейной алгебры, такие как матрица, определитель, линейная зависимость и независимость векторов, ранг матрицы, произведение матриц, обратная матрица. Во многих серьезных руководствах по линейному программированию (см., например, [1, 9, 164]) сначала излагается довольно сложная теория выпуклых многогранных множеств, доказываются тонкие теоремы отделимости таких множеств, строится теория двойственности и лишь затем переходят к изложению и обоснованию основных методов линейного программирования, начиная с симплекс-метода. Такая схема изложения вполне оправдана при написании объемистых и обстоятельных монографий и учебных пособий и весьма удобна для опытного читателя, но, по нашему мнению, слишком трудна для студента-первокурсника, который делает первые шаги в линейном программировании и которому в сжатые сроки надо освоить начальные главы этой науки.

В настоящем учебном пособии первооснова линейного программирования — симплекс-метод — излагается с подробной мотивировкой каждого элемента и строго обосновывается, включая так называемый вырожденный случай, в первой же главе. Мы надеемся, что после ознакомления с этой главой у читателя сложится ясное представление, что каждый шаг симплекс-метода, заключающегося в направленном переборе конечного числа угловых точек допустимого множества с одновременным уменьшением (в задачах минимизации) или увеличением (в задачах максимизации) значений целевой функции в этих точках, по сути представляет собой не что иное, как переход от одной симплекс-таблицы к другой с помощью известной студентам из линейной алгебры схемы исключения Гаусса—Жордана со специальным выбором разрешающего (главного) элемента.

Лишь после того, как дано математически строгое изложение основ симплекс-метода, мы переходим к доказательству теорем, составляющих фундамент линейного программирования: теоремы существования решения, теоремы двойственности, некоторых других важных фактов теории систем линейных неравенств и уравнений (теоремы Фаркаша, Штимке, неравенство Хоффмана), причем сам симплекс-метод используется как инструмент доказательства ряда этих теорем, что существенно упрощает доказательство. Этот материал изложен во второй главе, и для его понимания наряду с упомянутыми выше элементарными сведениями из линейной алгебры требуется еще владение начальными понятиями математического анализа. Отметим, что на возможность использования симплекс-метода для доказательства теорем и построения теории линейного программирования указывали многие авторы; примеры реализации этой идеи даны, например, в [16, 98, 119, 127]. На основе развитой теории двойственности дается строгое изложение других методов линейного программирования:  $M$ -метода (§ 2.3), двойственного симплекс-метода, метода сокращения невязки (глава 3), метода потенциалов для транспортной задачи (глава 4).

У этой книги есть и другое отличие: в ней впервые в учебной литературе с такой полнотой излагается теория устойчивости задач линейного программирования. Этот материал составляет содержание пятой главы — в ней формулируются и доказываются критерии устойчивости общей задачи линейного программирования. Заметим, что проблема устойчивости в линейном программировании, несмотря на свою важность, до недавних пор оставалась малоисследованной, полученные здесь результаты являются относительно новыми, они в основном излагаются в журнальных статьях [8, 27, 148, 176] и недостаточно отражены в учебной и монографической литературе [9, 10, 54, 101, 149].

Настоящая книга имеет еще одну особенность. На практике поиск решения неустойчивых задач линейного программирования невозможен без привлечения специальных методов регуляризации, разработанных в рамках общей теории неустойчивых (некорректных) задач [12, 19, 22, 24, 36, 39, 78, 92, 94, 101–104, 107, 117, 140–142, 144, 149, 174, 182, 203, 204, 208, 210, 219–222]. В настоящей книге впервые в учебной литературе по линейному программированию подробно и систематически излагаются основные методы регуляризации — методы стабилизации, невязки, квазирешений, основанные на идее расширения множества [8–10, 19, 24–26, 31–35, 71, 73–75, 91, 101, 105–108, 148, 149, 182, 203, 208, 210, 222] и сводящие исходную, возможно, неустойчивую, задачу линейного программирования к другой вспомогательной параметрической задаче, которая также является задачей линейного программирования и при надлежащем согласовании входящих в нее параметров порождает устойчивый вычислительный процесс, сходящийся к решению исходной задачи. В главе 6 дается описание этих методов, доказываются их сходимость, выводятся оценки скорости сходимости, порядок которых совпадает с порядком погрешности задания исходных данных и которые являются неулучшаемыми по порядку.

Глава 7 посвящена так называемым полиномиальным методам линейного программирования, которые были разработаны в конце прошлого века

[111–114, 151–153, 166, 169, 172, 173, 175, 177–180] и в учебной литературе пока не получили должного освещения.

В настоящее издание добавлена новая глава 8 «Коррекция противоречивых задач линейного программирования». Задачу оптимизации принято называть противоречивой, если она не имеет решения. Такие задачи могут возникнуть при моделировании сложных технико-экономических систем, когда информация, использованная при составлении математической модели системы, была неточной, содержала ошибки в оценке объема нужных для производства сырьевых, трудовых ресурсов, противоречивых директив и т. п. При работе с такими задачами возникают важные проблемы, такие как найти «узкие» места в математической модели, являющиеся источниками ее противоречивости, указать пути исправления (коррекции) модели. Возможны также ситуации, когда исходная математическая модель сама по себе не является противоречивой, но требует коррекции, так как, скажем, обнаружилось, что нужные возросшие объемы производства, качество продукции невозможно обеспечить в рамках действующей модели производства или появились более совершенные технологии, более жесткими стали требования к охране окружающей среды и т. д. В настоящей книге мы рассмотрим лишь некоторые задачи коррекции, относящиеся к линейным моделям, связанным с линейным программированием.

Библиография по линейному программированию насчитывает много тысяч названий. В приводимом ниже списке литературы мы упомянули лишь некоторые монографии, учебные пособия, а также небольшое количество журнальных статей, имеющих прямое отношение к содержанию книги. Для читателя, интересующегося педагогическими аспектами, укажем изданные на русском языке учебники и учебные пособия по линейному программированию [1, 9, 13, 16, 21, 38, 44, 63, 66, 90, 115, 127, 131, 138] и задачки [3, 10, 40, 43, 53, 68, 84, 87, 123].

При написании книги учтен многолетний педагогический опыт, накопленный авторами при чтении основных и специальных курсов по оптимизации на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и на факультете прикладной математики, физики и информационных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова.

Авторы выражают глубокую благодарность А. С. Антипину, Л. А. Артемьевой, Е. Г. Белоусову, А. И. Беникову, Б. А. Будаку, Д. В. Денисову, В. И. Ерохину, Х. Д. Икрамову, М. Ю. Кокурину, А. С. Красникову, В. А. Морозову, В. В. Морозову, Е. В. Непомнящему, Ю. Е. Нестерову, Н. М. Новиковой, М. М. Потапову, А. В. Разгулину, А. А. Станевичюсу, А. В. Тимохову, В. В. Фёдорову, Ю. Н. Черемных, М. Д. Ячимовичу за многочисленные полезные дискуссии и советы, способствовавшие улучшению содержания книги. Будем признательны читателям за критические замечания. Наконец, мы не могли бы написать эту книгу, выдержавшую несколько изданий, без теплой заботы наших жен Татьяны Евгеньевны Васильевой и Марины Владимировны Иваницкой, которым посвящается настоящая книга.