Глава 1

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Операции над подмножествами. Подсчет числа элементов

1.1. Пусть A_i $(i \in I)$, B — подмножества в X. Доказать равенства:

а) $\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \cap B)$; б) $\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \cup B)$;

в) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \bar{A}_i$; г) $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \bar{A}_i$.

1.2. Пусть X — произвольное множество, 2^X — множество всех его подмножеств. Доказать, что операция $\triangle$ *симметрической разности*

$$A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

на множестве 2^X обладает следующими свойствами:

а) $A \triangle B = B \triangle A$;

б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

в) $A \triangle \varnothing = A$;

г) для любого подмножества $A \subset X$ существует подмножество $B \subset X$ такое, что $A \triangle B = \varnothing$;

д) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

е) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

ж) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1.3. Доказать, что для любых конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

1.4. Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{p_r}\Big),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все различные простые делители числа n, $\varphi(n)$ — *функция Эйлера*.

1.5. Какое максимальное число подмножеств можно образовать из данных n подмножеств фиксированного множества с помощью операций пересечения, объединения и дополнения?

1.6. Пусть A, B, C — подмножества в некотором множестве. Доказать, что $A \cap B \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \bar{B} \cup C$.

§ 2. Число отображений и подмножеств, биномиальные коэффициенты

2.1. Пусть X — множество людей в некотором помещении, Y — множество стульев в этом помещении и пусть:

а) каждому человеку поставлен в соответствие стул, на котором он сидит;

б) каждому стулу поставлен в соответствие человек, который на нем сидит.

В каких случаях а) и б) определяют отображения $X \to Y$ и $Y \to X$? В каких случаях эти отображения инъективны, сюръективны, биективны?

2.2. Доказать, что если множество X бесконечно, а его подмножество Y конечно, то существует биективное отображение $X \setminus Y \to X$.

2.3. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение. Отображение $g\colon Y \to X$ называется *левым* (соответственно *правым*) *обратным* для f, если $g \circ f = 1_X$ (соответственно $f \circ g = 1_Y$). Доказать, что:

а) отображение f инъективно в том и только том случае, если оно обладает левым обратным;

б) отображение f сюръективно в том и только том случае, если оно обладает правым обратным.

2.4. Установить биективное соответствие между множеством всех отображений множества X во множество $\{0, 1\}$ и множеством 2^X (см. 1.2) и найти $|2^X|$, если $|X| = n$.

2.5. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$. Найти число:

а) отображении;

б) инъективных отображений;

в) биективных отображений;

г) сюръективных отображений множества X во множество Y.

2.6. Пусть $|X| = n$. Найти число $\binom{n}{m}$ всех подмножеств в X, состоящих из m элементов (это число называется также *числом сочетаний из n элементов по m* и часто обозначается символом C_n^m).

2.7. Пусть $|X| = n$. Найти число всех подмножеств в X, состоящих из четного числа элементов.

2.8. Доказать формулу *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.9. Пусть $|X| = n$ и $m_1 + \ldots + m_k = n$ $(m_i \geqslant 0)$. Найти число

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$$

упорядоченных разбиений множества X на k подмножеств, содержащих соответственно $m_1, \ldots, m_k$ элементов.

2.10. Доказать равенства:

а) $(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{\substack{(m_1,\ldots,m_k) \\ m_1+\ldots+m_k=n,\ m_i \geqslant 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} x_1^{m_1} \ldots x_k^{m_k}$;

б) $\sum\limits_{\substack{(m_1,\ldots,m_k) \\ m_1+\ldots+m_k=n,\ m_i \geqslant 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = k^n$.

2.11. Доказать равенства:

а) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$; б) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;

в) $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$; г) $\sum\limits_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$;

д) $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i i \binom{n}{i} = 0, \quad n > 1$; е) $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{p}{i}\binom{q}{m-i} = \binom{p+q}{m}$;

ж) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$;

з) $\sum\limits_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i}(1^i + 2^i + \ldots + n^i) = (n+1)^{r+1} - (n+1)$;

и) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$;

к) $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{p(p+1)\ldots(p+i-1)}{i!} = \dfrac{(p+1)\ldots(p+n)}{n!}$;

л) $\sum\limits_{i=k}^{n-l} \binom{i}{k}\binom{n-i}{l} = \binom{n+1}{k+l+1}, \quad n \geqslant k + l \geqslant 0$.

2.12. Доказать, что $x^m + x^{-m}$ является многочленом степени m от $x + x^{-1}$.

2.13. Найти число разбиений числа n в упорядоченную сумму из k неотрицательных слагаемых.

§ 3. Перестановки

3.1. Перемножить перестановки в указанном и обратном порядках:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&2&1&5\end{pmatrix}$.

3.2. Записать в виде произведения независимых циклов перестановки:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&1&7&3&6&2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&7&5&2&4\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&7&6&5&1&2&4\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&3&6&7&1&5&2\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\ldots&2n&2n-1\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n&n+1&n+2&\ldots&2n\\n+1&n+2&\ldots&2n&1&2&\ldots&n\end{pmatrix}$.

3.3. Записать в виде таблицы перестановки:

а) $(136)(247)(5)$; б) (1654237);

в) $(135\ldots 2n-1)(246\ldots 2n)$.

3.4. Перемножить перестановки:

а) $[(135)(2467)]\cdot[(147)(2356)]$;

б) $[(13)(57)(246)]\cdot[(135)(24)(67)]$.

3.5. Определить число инверсий в последовательностях:

а) $2, 3, 5, 4, 1$; б) $6, 3, 1, 2, 5, 4$;

в) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$; г) $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2$;

д) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$;

е) $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$;

ж) $k, k+1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, k-1$;

з) $k, k+1, \ldots, n, k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.

3.6. Определить четность перестановок:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&4&7&2&1&3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&2&1&6&4&8&7\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 1 & 3 & 5 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2 & 4 & 6 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{pmatrix}$.

3.7. Определить четность перестановок:

а) $(123\ldots k)$; б) $(i_1 i_2 \ldots i_k)$;

в) $(1473)(67248)(32)$; г) $(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)\ldots(i_{2k-1} i_{2k})$;

д) $(i_1 \ldots i_p)(j_1 \ldots j_q)(k_1 \ldots k_r)(l_1 \ldots l_s)$.

3.8. Число инверсий в нижней строке перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ равно k. Найти число инверсий в нижней строке перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$.

3.9. Рассматриваются перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ степени n.

а) В какой строке $(a_1, \ldots, a_n)$ число инверсий наибольшее?

б) Сколько инверсий образует число 1, стоящее в нижней строке на k-м месте?

в) Сколько инверсий образует число n, стоящее в нижней строке на k-м месте?

3.10. Пусть в последовательности $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ переставлены два числа, q и $q+1$, где $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Доказать, что число инверсий изменится на ± 1.

3.11. Пусть задана перестановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$, причем число инверсий в нижней строке равно k. Доказать, что:

а) σ является произведением k транспозиций вида $(q, q+1)$, где $1 \leqslant q \leqslant n-1$;

б) σ нельзя представить в виде произведения менее k транспозиций указанного вида.

3.12. Пусть $\pi, \sigma \in \mathbf{S}_n$, причем σ является циклом длины k. Доказать, что $\pi\sigma\pi^{-1}$ также является циклом длины k.

3.13. Выяснить, как изменяется разложение перестановки в произведение независимых циклов при умножении ее на некоторую транспозицию. Что происходит при этом с декрементом перестановки?

3.14. Доказать, что всякая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ может быть представлена как произведение транспозиций вида:

а) (12), (13), $\ldots (1, n)$;

б) (12), (23), $\ldots (n-1, n)$.

3.15. Доказать, что всякая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ может быть представлена как произведение нескольких сомножителей, равных циклам (12) и $(123\ldots n)$.

3.16. Доказать, что всякая четная перестановка может быть представлена как:

а) произведение тройных циклов;

б) произведение циклов вида (123), (124), …, $(12n)$.

3.17. Пусть f_{ij} — один из двучленов $x_i - x_j$ или $x_j - x_i$, где i и j — произвольные натуральные числа от 1 до n, $i < j$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произведение всех этих двучленов. Доказать, что для любой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n).$$

* * *

3.18. Пусть T — некоторый набор транспозиций из $\mathbf{S}_n$ и Γ — граф со множеством вершин $1, 2, \ldots, n$ и множеством ребер T. Доказать, что:

а) всякая перестановка из $\mathbf{S}_n$ представляется в виде произведения транспозиций из T тогда и только тогда, когда граф Γ связный;

б) при $|T| < n - 1$ существует перестановка из $\mathbf{S}_n$, не представимая в виде произведения транспозиций из набора T.

3.19. Пусть задано число k, причем $1 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}$. Доказать, что в $\mathbf{S}_n$ существует перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, число инверсий в нижней строке которой равно k.

3.20. Найти сумму числа инверсий нижних строк во всех перестановках $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$.

3.21. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$, $\sigma \in S_X$, $\tau \in S_Y$. Определим $\xi \in S_{X \times Y}$, полагая $\xi(x, y) = (\sigma(x), \tau(y))$, $x \in X$, $y \in Y$.

Найти:

а) $\operatorname{sgn} \xi$, если заданы $\operatorname{sgn} \sigma$ и $\operatorname{sgn} \tau$;

б) длины независимых циклов в разложении перестановки ξ, если известны длины $k_1, \ldots, k_s$ и $l_1, \ldots, l_t$ независимых циклов в разложениях перестановок σ и τ (с учетом циклов длины 1). Получить отсюда еще одно решение задачи а).

3.22. Пусть $d = d(\sigma)$ — декремент перестановки σ. Доказать, что:

а) $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^d$;

б) перестановку σ можно представить в виде произведения d транспозиций;

в) перестановку σ нельзя представить в виде произведения менее чем d транспозиций.

3.23. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Доказать, что $\sigma = \alpha\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{S}_n$ и $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon$.

3.24. Пусть σ — цикл длины n. Доказать, что:

а) если натуральное число m делит n, то σ^m является произведением m циклов длины $\dfrac{m}{n}$;

б) если m — натуральное число, взаимно простое с n, то σ^m является циклом длины n;

в) если m — произвольное натуральное число и d — наибольший общий делитель чисел m, n, то σ^m является произведением d циклов длины $\dfrac{n}{d}$.

3.25. Пусть перестановка σ разложена в произведение независимых циклов длин $n_1, \ldots, n_k$. Предположим, что m — произвольное натуральное число и d_i — наибольший общий делитель чисел m и n_i. Доказать, что σ^m является произведением d_1 цикла длины $\dfrac{n_1}{d_1}$, d_2 циклов длины $\dfrac{n_2}{d_2}$, …, d_k циклов длины $\dfrac{n_k}{d_k}$.

§ 4. Рекуррентные соотношения. Математическая индукция

4.1. Пусть $f(x) = x^2 - ax - b$ — характеристический многочлен рекуррентного уравнения

$$u(n) = au(n-1) + bu(n-2) \quad (n \geqslant n_0 + 2).$$

Доказать, что:

а) функция $u(n) = \alpha^n$ является решением данного уравнения, если α — корень $f(x)$;

б) функция $u(n) = n\alpha^n$ является решением данного уравнения, если α — двойной корень $f(x)$;

в) если $f(x)$ имеет различные ненулевые корни α_1 и α_2, то всякое решение данного уравнения имеет вид

$$u(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n,$$

причем постоянные C_1 и C_2 определяются однозначно;

г) если $f(x)$ имеет двойной корень α, то всякое решение данного уравнения имеет вид

$$u(n) = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n,$$

причем постоянные C_1 и C_2 определяются однозначно, если $\alpha \neq 0$.

4.2. Решить рекуррентные уравнения ($n_0 = 0$):

а) $u(n) = 3u(n-1) - 2u(n-2), \quad u(0) = -2, \quad u(1) = 1;$

б) $u(n) = -2u(n-1) - u(n-2), \quad u(0) = -1, \quad u(1) = -1.$

4.3. Доказать, что при $a \neq 1$

$$1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1} = \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}.$$

4.4. Вычислить $u(0) + u(1) + \ldots + u(n)$, где $n \geqslant 2$ и:

а) $u(n) = 5u(n-1) - 4u(n-2), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 3;$

б) $u(n) = 2u(n-1) - u(n-2), \quad u(0) = 1, \quad u(1) = -1;$

в) $u(n) = 4u(n-1) - 4u(n-2), \quad u(0) = -2, \quad u(1) = 0.$

4.5. Пусть $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ и $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$, где $n \geqslant 2$. Числа $u(n)$ называются *числами Фибоначчи*. Вычислить $u(n)$.

4.6. Пусть $a \geqslant -1$. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $(1+a)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

4.7. Доказать, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

4.8. Доказать, что для любого натурального числа n:

а) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1);$

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3};$

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$

г) $\dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{n}{4(n+4)};$

д) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2};$

е) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$;

ж) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

4.9. Доказать, что при любом натуральном n:

а) число n^3+5n делится на 6;

б) число $2n^3+3n^2+7n$ делится на 6;

в) число n^5-n делится на 30;

г) число $2^{2n}-1$ делится на 3;

д) число $11^{6n+3}+1$ делится на 148;

е) число $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9;

ж) число $7^{2n}-4^{2n}$ делится на 33.

4.10. Доказать, что для любого натурального числа n выполнены неравенства

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\leqslant n.$$

* * *

4.11. Пусть $u(n)$ — последовательность чисел Фибоначчи. Доказать, что:

а) $u(1)+\ldots+u(n)=u(n+2)-1$;

б) $u(1)^2+\ldots+u(n)^2=u(n)u(n+1)$;

в) $u(n+1)^2-u(n-1)^2=u(2n)$;

г) $u(1)^3+\ldots+u(n)^3=\frac{1}{10}[u(3n+2)+(-1)^{n+1}6u(n-1)+5]$;

д) $u(m+n)=u(m)u(n-1)+u(m+1)u(n)$;

е) если n делит m, то $u(n)$ делит $u(m)$;

ж) $(u(n),u(m))=u((n,m))$.

4.12. Пусть $u_0(t)=0$, $u_1(t)=1$ и $u_n(t)=tu_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)$. Доказать, что:

а) $u_n(t)=t^{n-1}-\binom{n-2}{1}t^{n-3}+\binom{n-3}{2}t^{n-5}+\ldots$;

б) если $t=2\cos\vartheta$, то $u_n(t)=\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}$;

в) $u_n(t)^2-u_k(t)^2=u_{n-k}(t)u_{n+k}(t)$, где $k=0,1,\ldots,n$;

г) $u_{n+1}(t)^2-u_n(t)^2=u_{2n+1}(t)$.

4.13. Пусть r и $\cos r\pi$ — рациональные числа. Доказать, что $\cos r\pi=0,\pm 1/2,\pm 1$.

4.14. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, находящихся в общем положении (т. е. никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке)?

§ 5. Суммирование

5.1. Найти суммы:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

5.2. Доказать, что сумма $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ представляет собой многочлен от n степени $k+1$.

* * *

5.3. Пусть $N(\sigma) = |\{i \mid \sigma(i) = i\}|$ — число неподвижных элементов перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ и

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (N(\sigma))^s = \gamma(s)n!, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Доказать, что $\gamma(1) = 1$, $\gamma(s)$ не зависит от n и

$$\gamma(s+1) = \gamma(s) + \binom{s}{1}\gamma(s-1) + \ldots + \binom{s}{k}\gamma(s-k) + \ldots + \binom{s}{s-1}\gamma(1) + 1.$$

5.4. Доказать, что

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n > 1, \end{cases}$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

5.5. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказать, что эквивалентны равенства:

а) $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$, $\quad f(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) g\left(\dfrac{n}{d}\right)$;

б) $g(n) = \prod\limits_{d|n} f(d)$, $\quad f(n) = \prod\limits_{d|n} g\left(\dfrac{n}{d}\right)^{\mu(d)}$.

5.6. Доказать, что функция Эйлера $\varphi(n)$ и функция Мёбиуса $\mu(n)$ связаны соотношением

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}.$$