

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
-----------------------	---

ГЛАВА 1

ПРОСТРАНСТВА И ФОРМЫ

§ 1. Абстрактные векторные пространства	11
1. Мотивировка и аксиоматизация (11). 2. Линейные оболочки. Подпространства (13). 3. Замечания о геометрической интерпретации (16). Упражнения (18).	
§ 2. Размерность и базис	18
1. Линейная зависимость (18). 2. Размерность векторного пространства и его базис (20). 3. Координаты. Изоморфизм пространств (26). 4. Пересечение и сумма подпространств (28). 5. Прямые суммы (28). 6. Факторпространства (30). Упражнения (32).	
§ 3. Двойственное пространство	33
1. Линейные функции (33). 2. Двойственное пространство и двойственный базис (34). 3. Рефлексивность (36). 4. Критерий линейной независимости (37). 5. Геометрическая интерпретация решений ЛОС (38). Упражнения (39).	
§ 4. Билинейные и квадратичные формы	40
1. Полилинейные отображения (40). 2. Билинейные формы (41). 3. Закон изменения матрицы билинейной формы (42). 4. Симметричные и кососимметричные формы (43). 5. Квадратичные формы (45). 6. Канонический вид квадратичной формы (46). 7. Вещественные квадратичные формы (49). 8. Положительно определённые формы и матрицы (50). 9. Канонический вид кососимметричной формы (54). 10. Пфаффиан (57). Упражнения (58).	

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Линейные отображения векторных пространств	60
1. Язык линейных отображений (60). 2. Задание линейных отображений матрицами (61). 3. Размерность ядра и образа (63). Упражнения (64).	
§ 2. Алгебра линейных операторов	64
1. Определения и примеры (64). 2. Алгебра операторов (66). 3. Матрицы линейного оператора в различных базисах (69).	

4.	Определитель и след линейного оператора (71). Упражнения (73).	
§ 3.	Инвариантные подпространства и собственные векторы . . .	74
1.	Проекторы (74).	
2.	Инвариантные подпространства (75).	
3.	Собственные векторы. Характеристический многочлен (77).	
4.	Критерий диагонализуемости (79).	
5.	Существование инвариантных подпространств (82).	
6.	Сопряжённый линейный оператор (82).	
7.	Фактороператор (84). Упражнения (85).	
§ 4.	Жорданова нормальная форма	86
1.	Теорема Гамильтона—Кэли (86).	
2.	ЖНФ: формулировка и следствие (89).	
3.	Корневые подпространства (90).	
4.	Случай нильпотентного оператора (92).	
5.	Единственность (94).	
6.	Другие подходы к ЖНФ (96).	
7.	Другие нормальные формы (99). Упражнения (100).	

ГЛАВА 3

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

§ 1.	Евклидовы векторные пространства	103
1.	Эвристические соображения и определения (103).	
2.	Основные метрические понятия (105).	
3.	Процесс ортогонализации (107).	
4.	Изоморфизмы евклидовых векторных пространств (110).	
5.	Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы (112).	
6.	Симплектические пространства (113). Упражнения (116).	
§ 2.	Эрмитовы векторные пространства	117
1.	Эрмитовы формы (117).	
2.	Метрические соотношения (119).	
3.	Ортогональность (120).	
4.	Унитарные матрицы (122).	
5.	Нормированные векторные пространства (123). Упражнения (125).	
§ 3.	Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением	126
1.	Связь между линейными операторами и θ -линейными формами (126).	
2.	Типы линейных операторов (128).	
3.	Канонический вид эрмитовых операторов (131).	
4.	Приведение квадратичной формы к главным осям (133).	
5.	Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду (135).	
6.	Канонический вид изометрий (136).	
7.	Нормальные операторы (139).	
8.	Положительно определённые операторы (143).	
9.	Полярное разложение (144). Упражнения (146).	
§ 4.	Комплексификация и овеществление	147
1.	Комплексная структура (147).	
2.	Овеществление (149).	
3.	Комплексификация (151).	
4.	Комплексификация — овеществление — комплексификация (153). Упражнения (155).	

- § 5. Ортогональные многочлены 156
1. Проблема аппроксимации (156).
 2. Метод наименьших квадратов (157).
 3. Линейные системы и метод наименьших квадратов (159).
 4. Тригонометрические многочлены (161).
 5. Замечание о самосопряжённых операторах (162).
 6. Многочлены Лежандра (сферические многочлены) (164).
 7. Ортогонализация с весом (168).
 8. Многочлены Чебышева (первого рода) (169).
 9. Многочлены Эрмита (170). Упражнения (171).

ГЛАВА 4

**АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ
ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**

- § 1. Аффинные пространства 173
1. Определение аффинного пространства (173).
 2. Изоморфизм (175).
 3. Координаты (176).
 4. Аффинные подпространства (177).
 5. Бариецентрические координаты (180).
 6. Аффинно-линейные функции и системы линейных уравнений (183).
 7. Взаимное расположение плоскостей (185). Упражнения (186).
- § 2. Евклидовы (точечные) пространства 187
1. Евклидова метрика (187).
 2. Расстояние от точки до плоскости (188).
 3. Расстояние между плоскостями (190).
 4. Определитель Грама и объём параллелепипеда (191). Упражнения (192).
- § 3. Группы и геометрии 193
1. Аффинная группа (193).
 2. Движения евклидова пространства (196).
 3. Группа изометрий (198).
 4. Линейная геометрия, отвечающая группе (201).
 5. Аффинные преобразования евклидова пространства (204).
 6. Выпуклые множества (206). Упражнения (208).
- § 4. Пространства с индефинитной метрикой 208
1. Индефинитная метрика (208).
 2. Псевдоевклидовы движения (209).
 3. Группа Лоренца (210).
 4. Собственная группа Лоренца (212). Упражнения (216).

ГЛАВА 5

КВАДРИКИ

- § 1. Квадратичные функции 217
1. Квадратичные функции на аффинном пространстве (217).
 2. Центральные точки для квадратичной функции (218).
 3. Приведение квадратичной функции к каноническому виду (220).
 4. Квадратичные функции на евклидовом пространстве (222). Упражнения (224).

§ 2. Квадрики в аффинном и евклидовом пространствах	224
1. Общее понятие квадрики (224). 2. Центр квадрики (227).	
3. Канонические типы квадрик в аффинном пространстве (228).	
4. Общие замечания о типах квадрик (230). 5. Квадрики в евклидовом пространстве (232). Упражнения (235).	
§ 3. Проективные пространства	236
1. Модели проективной плоскости (236). 2. Проективное пространство произвольной размерности (239).	
3. Однородные координаты (240). 4. Аффинные карты (241). 5. Понятие алгебраического многообразия (243).	
6. Проективная группа (244). 7. Проективная геометрия (247). 8. Двойное отношение (249).	
9. Выражения двойного отношения в координатах (251). Упражнения (253).	
§ 4. Квадрики в проективном пространстве	254
1. Классификация (254). 2. Примеры и изображения проективных квадрик (255).	
3. Пересечение прямой с проективной квадрикой (257). 4. Общие замечания о проективных квадриках (258). Упражнения (259).	

ГЛАВА 6

ТЕНЗОРЫ

§ 1. Начала тензорного исчисления	260
1. Понятие о тензорах (260). 2. Произведение тензоров (261).	
3. Координаты тензора (263). 4. Тензоры в разных системах координат (266).	
5. Тензорное произведение пространств (268). Упражнения (271).	
§ 2. Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров	272
1. Свёртка тензора (272). 2. Структурный тензор алгебры (274).	
3. Симметричные тензоры (277). 4. Кососимметричные тензоры (281).	
5. Тензорные пространства (283). Упражнения (284).	
§ 3. Внешняя алгебра	285
1. Внешнее умножение (285). 2. Внешняя алгебра векторного пространства (286).	
3. Связь с определителями (290). 4. Векторные подпространства и p -векторы (292).	
5. Условия разложимости p -векторов (293). Упражнения (296).	

ГЛАВА 7

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Норма и функции линейного оператора	298
1. Норма линейного оператора (298). 2. Функции линейных операторов (матриц) (301).	
3. Экспонента (302). 4. Однопараметрические подгруппы линейной группы (305).	
5. Спектральный радиус (309). Упражнения (311).	

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения	312
1. Производная экспоненты (312). 2. Дифференциальные уравнения (313). 3. Линейное дифференциальное уравнение порядка n (314).	
§ 3. Выпуклые многогранники и линейное программирование . .	315
1. Формулировка задачи (315). 2. Мотивировка (315). 3. Основные геометрические понятия (318). Упражнения (320).	
§ 4. Неотрицательные матрицы	321
1. Производственная мотивировка (321). 2. Свойства неотрицательных матриц (322). 3. Стохастические матрицы (323).	
§ 5. Геометрия Лобачевского	327
1. Пространство Лобачевского (327). 2. Движения пространства Лобачевского (329). 3. Метрика Лобачевского (331). 4. Плоскость Лобачевского (334).	
§ 6. Нерешённые задачи	339
1. Проблема Штрассена (339). 2. Ортогональные разложения (340). 3. Конечные проективные плоскости (341). 4. Базисы пространств и латинские квадраты (342).	
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ	344
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ	359
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	362