Занятие 1
Перечисление. Таблицы. Умножение

— Ой! Теперь он и тебя сосчитал.
— Ну, он за это поплатится!

Из мультфильма
«Козлёнок, который считал до десяти»

Как узнать, сколько (детей на прогулке, монет в сундуке, отрезков на чертеже, чисел с нужными свойствами — нужное подчеркнуть)? Надёжнее всего перечислить, приговаривая «Первый, второй...» А как не запутаться, считали этого ребёнка или ещё нет? А вот пусть не бегают, а построятся по порядку. Детей многие умеют строить, но разве можно построить пересекающиеся отрезки? Можно, если строить не сами отрезки, а их имена (да и детей иногда удобнее посчитать по списку). А как посчитать быстро и точно, если детей много? Пусть построятся хотя бы парами или даже в колонну по 4. Видишь 9 таких четвёрок — значит, детей 36. Итак:

1) ответ на вопрос «Сколько?» связан с перечислением;

2) вместо самих объектов бывает удобнее считать их имена (задача 1.2);

3) удобнее считать то, что разделено на группы;

4) разделение на группы можно оформить в виде таблицы (каждая группа — строка или столбец), тогда задача сведётся к подсчёту заполненных клеток таблицы;

5) если группы равные, то число клеток таблицы находят умножением;

6) две задачи могут формулироваться совсем по-разному, но если им соответствует одинаковые таблицы (и вообще, одинаковые «картинки»), то и решения будут аналогичными, и ответы совпадут (задачи 1.2 и 1.3, а также 1.5 и 1.6).

Замечания по отдельным задачам

- В задаче 1.1 достаточно обсудить один вид таблиц. Но если кто-то из детей предложит другой вид, это тоже интересно. В задаче 1.2 рекомендуем рассмотреть оба порядка перечисления. Обычно вопрос «Кто-нибудь считал по-другому?» пользуется успехом. В крайнем случае второй способ может предложить и сам учитель. А вот в задаче 1.3 альтернативные способы подсчёта лучше замять. Аккуратный ученик может за 5 минут перечислить все нужные числа в порядке возрастания, пользы от этого никакой.

- Пятиклассники могут быть незнакомы с понятием простого числа (см. задачу 1.3). Это несложно пояснить на примерах и вместе с детьми выписать четыре нужных числа.
- Замечание к задаче 1.4 советуем не пропустить. Оно подводит к пониманию того, что разделение на группы удобно описывается таблицей, но если каждая группа разделяется на более мелкие, а те — на ещё более мелкие и так происходит несколько раз, то удобнее дерево. Переход от таблиц к деревьям отрабатывается на третьем и пятом занятиях.

Задача 1.1. Пять учеников Хогвартса изучили семь чудес и успешно сдали экзамен трём волшебникам. На экзамене каждый ученик совершил по одному чуду по указанию каждого из волшебников и получил за это плюсик.

а) Сколько всего плюсиков поставлено на экзамене?

б) Приведите пример таблицы, из которой видно, кто кому какое чудо продемонстрировал.

Обсуждение. а) Каждый из пяти учеников получил по три плюсика. А всего плюсиков $5 \cdot 3 = 15$.

б) Назовём волшебников А, Б и В, а чудеса занумеруем числами от 1 до 7. Тогда таблица могла выглядеть, например, так.

	А	**Б**	**В**
Первый ученик	1	3	7
Второй ученик	2	6	5
Третий ученик	5	4	2
Четвёртый ученик	7	4	3
Пятый ученик	5	2	3

Заполняя её, мы считали, что одного и того же ученика разные волшебники не просили совершить одно и то же чудо. Но если бы и просили, в таблице всё равно было бы 15 заполненных клеток.

Таблицу с той же самой информацией можно организовать и по-другому. В каждой строке здесь тоже по три заполненные клетки.

	1	2	3	4	5	6	7
Первый ученик	А		Б				В
Второй ученик		А			В	Б	
Третий ученик		В		Б	А		
Четвёртый ученик			В	Б			А
Пятый ученик		Б	В		А		

Задача 1.2. На прямой отметили 5 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже? (Считаются и отрезки, у которых, кроме концов, есть отмеченные точки внутри.)

Обсуждение. Самый простой и надёжный способ подсчитать что-то — *перечисление*. Для этого удобно ввести *обозначения* (см. рис. 1). Чтобы не запутаться, перечислять будем *в определённом порядке*. В каком именно — дело вкуса. Например, можно начать с «одинарных отрезков», их четыре: AB, BC, CD и DE. Запишем их в первый столбик. Во второй запишем «двойные» отрезки, в третий — «тройные», а четвёртый столбик будет состоять всего из одного отрезка AE (см. рис. 2). Всего отрезков $4+3+2+1=10$.

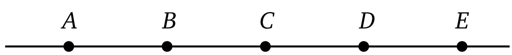


Рис. 1

AB	AC	AD	AE
BC	BD	BE	
CD	CE		
DE			

Рис. 2

AB	BC	CD	DE
AC	BD	CE	
AD	BE		
AE			

Рис. 3

Можно было перечислять точки и в алфавитном порядке: в первом столбике все на букву A, во втором — на букву B, в третьем — на C, а в четвёртом будет единственный отрезок DE (см. рис. 3).

Приглядевшись, замечаем, что рисунки 2 и 3 отличаются лишь тем, что столбики превратились в строчки и наоборот.

Задача 1.3. Выпишите без повторов все числа, которые можно представить как произведение двух однозначных простых чисел (возможно, одинаковых). Сколько их всего?

Обсуждение. В предыдущей задаче каждый отрезок описывался двумя точками — концами отрезка. А здесь каждое число будем описывать парой множителей. Составим таблицу, записывая в клетки произведения соответствующих множителей (см. таблицу). Нижняя половина не заполнена, так как из-за переместительного закона умножения числа получатся те же самые. Выпишем все числа слева направо и сверху вниз: 4, 6, 10, 14, 9, 15, 21, 25, 35, 47. Заметим, что это не совсем порядок возрастания. Всего чисел $4+3+2+1=10$. Совпадение ответов с предыдущей задачей не случайно, оно связано со сходством таблиц.

	2	**3**	**5**	**7**
2	4	6	10	14
3		9	15	21
5			25	35
7				49

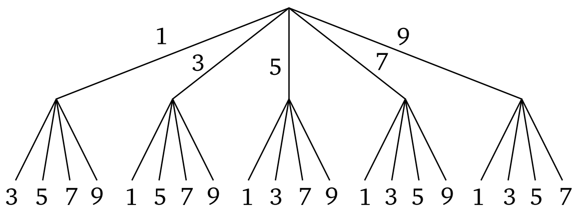
Задача 1.4. а) Мальвина велела Буратино выписать все двузначные числа, у которых обе цифры нечётны и не повторяются. Если он пропустит хотя бы одно, то Мальвине придётся посадить его в чулан. Посоветуйте Буратино, как организовать работу так, чтобы не попасть в чулан. Сколько всего чисел ему придётся выписать?

б) Тем временем Мальвина выписала все трёхзначные числа, у которых все цифры нечётны и не повторяются. Сколько времени она потратила, записывая по одной *цифре* в секунду?

Обсуждение. а) Буратино ничего не забудет, если сначала составит таблицу, учитывая, что и в разряде десятков, и в разряде единиц могут находиться цифры 1, 3, 5, 7, 9. Видно, что в таблице $2(4+3+2+1)=20$ чисел.

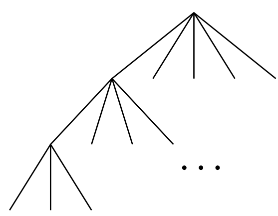
	1	**3**	**5**	**7**	**9**
1		13	15	17	19
3	31		35	37	39
5	51	53		57	59
7	71	73	75		79
9	91	93	95	97	

Количество чисел можно было подсчитать и без непосредственного выписывания их всех. На первом месте может быть любая из пяти цифр, поэтому строк в таблице пять. На втором — любая из четырёх оставшихся, то есть в каждой строке по четыре числа. А всего чисел $5 \cdot 4 = 20$. Разделение на пять групп, в каждой из которых по четыре числа, можно схематически проиллюстрировать: см рисунок. Такая схема называется *деревом*, хотя похожа скорее на куст, растущий почему-то вниз.



б) Как применить идею таблицы к трёхзначным числам? Нарисовать вместо прямоугольника параллелепипед? Сложновато. Если ограничиться двумерной таблицей, то придётся удлинить строку, записав в неё уже не 5 цифр, а 20 двузначных чисел, которые написал Буратино. Каждое можно продолжить тремя способами. Например, 13 можно продолжить до 135, 137 и 139. Поэтому Мальвина написала в 3 раза больше чисел, чем Буратино: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Для этого ей пришлось написать 180 цифр, потратив 180 секунд, или 3 минуты.

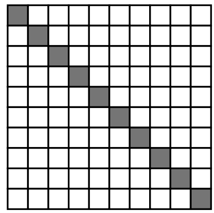
Если рассуждать не с помощью таблицы, а с помощью дерева, то придётся пририсовать третий этаж. На первом числа разбиваются на 5 групп в зависимости от первой цифры. На втором каждая из пяти групп разбивается на 4 группки поменьше в зависимости от второй цифры. В каждой маленькой группке три числа, так как для написания третьей цифры есть три возможности. Так же как мы не стали выписывать таблицу с 20 столбцами, дерево тоже незачем рисовать целиком. Достаточно, например, как на рисунке.



Замечание. С двузначными и трёхзначными числами мы разобрались. Интересно, а сколько есть четырёхзначных чисел, составленных из неповторяющихся нечётных цифр? Пририсуем к дереву ещё один этаж, на котором от каждой веточки отходят по две более мелких. Получим $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ чисел.

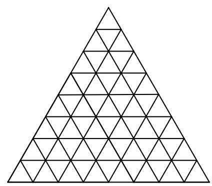
А сколько таких пятизначных чисел? Этаж-то к дереву пририсовать можно, но от добавления множителя 1 произведение не изменится, пятизначных чисел тоже 120. Подумайте, сколько шестизначных и ещё более длинных чисел.

Задачи для самостоятельного решения



Задача 1.5. Сколько клеток в квадрате 10×10 лежат выше закрашенной диагонали (см. рисунок)?

Задача 1.6. На прямой отметили 10 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже?



Задача 1.7. На сколько меньших треугольничков со стороной 1 разбит треугольник со стороной 8 на рисунке?

Задача 1.8. В деревне Простоквашино 16 мальчиков и 14 девочек. На 1 сентября каждый мальчик подарил по цветку каждой девочке и ещё 1 цветок Марье Ивановне, а потом девочки тоже подарили все полученные цветы Марье Ивановне. Сколько килограммов цветов принесла своей козе Марья Ивановна, если каждый цветок весил по 50 г?

Задача 1.9. Из спичек сложен разбитый на клетки квадрат 8×8, сторона каждой клетки — 1 спичка. Сколько всего спичек понадобилось?

Задача 1.10. Сколько всего трёхзначных чисел, у которых первая и вторая цифры разной чётности, а сумма цифр делится на 10?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д1—Д10.

Решения

1.5. Ответ. 45 клеток.

Решение. В первой строке 9 клеток, во второй 8 и т. д. Всего $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ клеток. Для подсчёта таких сумм удобно объединять числа в пары от краёв к середине: $(9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5=45$.

1.6. Ответ. 45 отрезков.

Решение. Обозначим, как и в задаче 1.2, отмеченные точки буквами A, B, C, ... Отрезки можно выписать в столбики как по размеру, так и по алфавиту. Важно не перепутать, сколько отрезков в первом столбике (или строке). Когда точек было 5, отрезков в первом столбике было 4. А если точек 10, то в первом столбике 9 отрезков по той же причине. А всего отрезков $9+8+\ldots+2+1=45$.

Комментарий. У задач 1.5 и 1.6 условия на первый взгляд разные, но ответы одинаковые. Почему совпали ответы? Потому что совпали вычисления: $9+8+7+6+5+4+3+2+1$. А почему совпали вычисления? Потому что совпали картинки: треугольная часть таблицы со строками в $9, 8, \ldots, 1$ клеток.

1.7. Ответ. 64 треугольника.

Решение. В верхней строке 1 треугольник, во второй 3 треугольника, в третьей 5. В последней, восьмой строке $8+7=15$ треугольников. Сложим 8 слагаемых: $1+3+\ldots+15$. Они разбиваются на 4 пары с одинаковой суммой $1+15=16$. Всего треугольников $4\cdot16=64$.

1.8. Ответ. 12 кг.

Решение. Каждый мальчик принёс 15 цветов. Все мальчики принесли $16\cdot15=240$ цветов. Масса всех цветов равна $50\cdot240=12\,000$ г $=12$ кг.

1.9. Ответ. 144 спички.

Решение. Разделим спички на две группы: лежащие вертикально и лежащие горизонтально. Вертикальных рядов $8+1=9$. В каждом ряду по 8 спичек. Всего вертикальных спичек 72. Горизонтальных столько же. Всего понадобилось $2\cdot8\cdot9=144$ спички.

1.10. Ответ. 45 чисел.

Решение. Разобьём все числа на группы в зависимости от первой цифры. Таких групп 9, так как первая цифра не может быть нулём. У второй цифры чётность должна быть другой, поэтому для каждой первой цифры есть 5 подходящих вторых цифр (0, 2, 4, 6, 8 при нечётной первой цифре и 1, 3, 5, 7, 9 при чётной). Сумма двух первых цифр — это число от $1+0=1$ до $9+8=17$. Если сумма получилась от 1 до 10, то, прибавляя однозначное число, её единственным образом можно дополнить до 10 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. А если от 11 до 17, то её единственным образом можно дополнить до 20 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. Поэтому каждую пару первых двух цифр разной чётности можно единственным образом дополнить до числа, соответствующего условию задачи. А таких пар $9 \cdot 5 = 45$.

Комментарий. Мы выяснили, что каждое искомое число *однозначно задаётся* первыми двумя цифрами. Это значит, что можно было считать только пары первых двух цифр.