## Глава 2

# Непрерывные пространства элементарных исходов

## § 2.1. Равномерное распределение. Плотность распределения вероятностей. Случайные величины. Независимость

Probabilists do it continuously but discretely.

Вероятностники делают это непрерывно, но прерывисто.[1]

(Из серии «Как они делают это».)

Bye, Bi, Variate[2]

(Из серии «Фильмы, которые не вышли на большой экран».)

После изучения основных вероятностных моделей с дискретными исходами мы в состоянии продвинуться далее и поработать с моделями, в которых участвует континуальное множество исходов. Теперь события ассоциируются с подмножествами непрерывного пространства (действительная прямая $\mathbb{R}$, интервал $(a, b)$, плоскость $\mathbb{R}^2$, квадрат и т. д.). Простейший случай — когда пространство исходов $\Omega$ представимо «хорошим» ограниченным множеством и вероятностное распределение соответствует единичной массе, равномерно по нему распределенной. Тогда событие (т. е. подмножество) $A \subseteq \Omega$ имеет вероятность

$$\mathsf{P}(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)}, \tag{2.1.1}$$

где $v(A)$ — стандартный евклидов объем (либо площадь, либо длина) множества $A$ и $v(\Omega)$ — то же для $\Omega$. Термин «равномерно распределенный» здесь ключевой; как показывает приведенная ниже задача 2.1.2, нужно тщательно разобраться, что это в точности значит в контексте данного примера. Полезное наблюдение состоит в том, что можно работать с плотностью *равномерного распределения*, которая приписывает точке $x \in \Omega$

[1] Игра слов: «discretely» означает в англ. языке «прерывисто», а «discreetly» — осторожно, благоразумно.

[2] Непереводимая игра слов.

значение

$$f_{\Omega}^{\mathrm{uni}}(x) = \frac{1}{v(\Omega)} I_{\Omega}(x), \tag{2.1.2}$$

а тогда вероятность события $A \subseteq \Omega$ вычисляется как интеграл

$$\mathsf{P}(A) = \int\limits_A f_{\Omega}^{\mathrm{uni}}(x)\,dx = \frac{1}{v(\Omega)} \int\limits_A dx \tag{2.1.3}$$

и мы приходим к тому же ответу, что и в формуле (2.1.1). Поскольку $f_{\Omega}^{\mathrm{uni}} \geqslant 0$ и $\int\limits_{\Omega} f_{\Omega}^{\mathrm{uni}}(x)\,dx = 1$, вероятность события $A \subseteq \Omega$ всегда находится между 0 и 1. Заметим, что масса, приписываемая единичному исходу $\omega$, представимому в виде точки из $\Omega$, равна нулю. Поэтому масса, приписываемая любому конечному или счетному множеству исходов, равна нулю (поскольку это сумма масс, приписываемых каждому исходу); чтобы иметь положительную массу (а значит, и положительную вероятность), событие $A$ должно быть несчетным.

**Задача 2.1.1.** Алиса и Боб условились встретиться в «Медном чайнике» после своих субботних лекций. Каждый из них появляется там в некий момент времени независимо друг от друга, и это время равномерно распределено между 12 и 13 часами. Каждый ожидает другого в течение $s$ минут, а затем уходит. Найдите наименьшее значение $s$, для которого вероятность встречи не менее 1/2.

**Решение.** Множество $\Omega$ — это единичный квадрат $\mathcal{S}$ с координатами $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ (время измеряется долями одного часа между 12:00 и 13:00). Каждая точка $\omega = (x,\ y) \in \Omega$ означает время $x$ прибытия Алисы и $y$ — Боба. Тогда событие «разница между моментами прибытия не превосходит $s$ минут» — это полоска вокруг диагонали $x = y$:

$$A = \left\{(x,\ y) \in \mathcal{S} \colon |x - y| \leqslant \frac{s}{60}\right\}.$$

Дополнение этого множества состоит из двух треугольников площадью $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{60}\right)^2$ каждый (см. рис. 2.1). Поэтому площадь $v(A)$ равна

$$1 - \left(1 - \frac{s}{60}\right)^2,$$

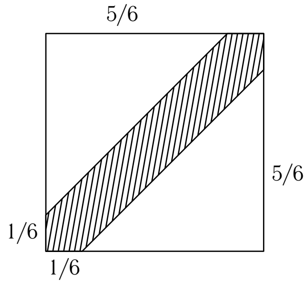

Рис. 2.1

и мы хотим, чтобы эта вероятность была не меньше 1/2. Отсюда получаем $s \geqslant 60\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 17{,}6$ минут. $\square$

**Задача 2.1.2.** Следующая задача известна как *парадокс Бертрана*. На круге радиуса $r$ случайным образом выбирается хорда. Найдите вероятность того, что она длиннее, чем сторона равностороннего треугольника, вписанного в круг. Рассмотрим три различных случая:

а) середина хорды равномерно распределена внутри круга,

б) один конец хорды фиксирован, а второй равномерно распределен по окружности,

в) расстояние между серединой хорды и центром круга равномерно распределено на отрезке $[0, r]$.

**Решение.** В случае а) середина хорды должна находиться внутри круга, вписанного в треугольник. Поэтому

$$\mathsf{P}(\text{хорда длиннее}) = \frac{\text{площадь вписанного круга}}{\text{площадь исходного круга}} = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

В случае б) второй конец окружности должен находиться на противоположной трети окружности. Поэтому

$$\mathsf{P}(\text{хорда длиннее}) = \frac{1}{3}.$$

Наконец, в случае в) середина хорды должна находиться на расстоянии не больше $r/2$ от центра. Поэтому

$$\mathsf{P}(\text{хорда длиннее}) = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

**Задача 2.1.3.** Палочку разламывают на две части случайным образом; затем ту часть, что длиннее, вновь разламывают надвое случайным образом. Какова вероятность того, что из трех частей можно образовать треугольник?

**Решение.** Пусть длина палочки $\ell$. Если $x$ — точка первого разлома, то $0 \leqslant x \leqslant \ell$ и точка $x$ равномерно распределена на интервале $(0, \ell)$. Если $x \geqslant \ell/2$, то вторая точка разлома $y$ равномерно распределена на интервале $(0, x)$. См. рис. 2.2. В противном случае точка $y$ равномерно распределена на $(x, \ell)$.

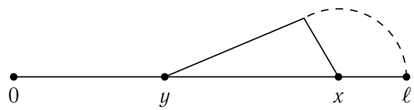


Рис. 2.2

Поэтому

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x,\ y \leqslant \ell;\ y \leqslant x \text{ для } x \geqslant \ell/2 \text{ и } x \leqslant y \leqslant \ell \text{ для } x \leqslant \ell/2\}.$$

Для того чтобы можно было образовать треугольник, точка $(x, y)$ должна лежать в области $A$, где

$$A = \left\{\max[x, y] > \frac{\ell}{2},\ \min[x, y] < \frac{\ell}{2},\ |x - y| < \frac{\ell}{2}\right\}.$$

В силу симметрии решение дается следующим вычислением:

$$\mathsf{P}(\text{треугольник}) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell/2} \frac{1}{l-x} \int\limits_{\ell/2}^{\ell/2+x} dy\,dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell/2} \frac{x}{l-x}\,dx,$$

что приводит к ответу $2\ln 2 - 1 \approx 0{,}3862944$. □

**Задача 2.1.4.** Палочку разламывают в двух заранее намеченных совершенно случайным образом по всей ее длине местах. Какова вероятность того, что три полученные части образуют треугольник?

**Ответ.** 1/4. Интересно, что это значение меньше, чем в задаче 2.1.3. Одно из отличий состоит в том, что в последней задаче пространство исходов $\Omega$ есть квадрат $(0, \ell) \times (0, \ell)$ (см. рис. 2.3), т. е. больше, чем в задаче 2.1.3 (поскольку теперь, возможно, будет разломана на две части более короткая часть, что исключалось в предыдущем случае). С другой стороны, интересующее нас событие отвечает одному и тому же множеству $A$. Интуитивно это должно привести к меньшей вероятности. И это действительно так, несмотря на то что вероятностная масса распределена в двух задачах по-разному. □

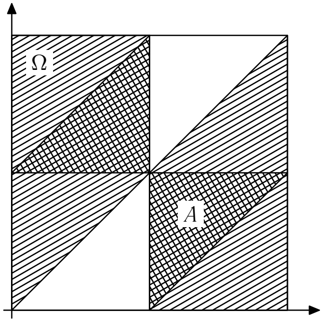

Рис. 2.3

**Задача 2.1.5.** Монета в один экю — это диск диаметром 4/5. В традиционной игре с бросанием монеты монету бросают случайным образом на квадратную решетку, образованную линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии 1. Если монета покрывает часть линии, вы теряете свой экю. Если нет — вы все равно теряете свой экю, но автомат исполняет государственный гимн по вашему выбору. Какова вероятность того, что вы получите возможность выбрать для себя государственный гимн?

**Решение.** Не ограничивая общности, предположим, что центр монеты оказался внутри квадрата с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1). Вы услышите гимн, если центр попал внутрь квадрата $\mathcal{S}$ вида

$$\frac{2}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}, \quad \frac{2}{5} \leqslant y \leqslant \frac{3}{5}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}(\text{автомат исполнит гимн}) = \text{площадь квадрата } S = \frac{1}{25}.$$ □

**Задача 2.1.6.** Из произвольной точки треугольника $ABC$ с высотами $H_1$, $H_2$, $H_3$ опустим перпендикуляры $h_1$, $h_2$, $h_3$ на его стороны, пусть $h = h_1 + h_2 + h_3$. Докажите, что $\mathsf{E}h = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3)$.

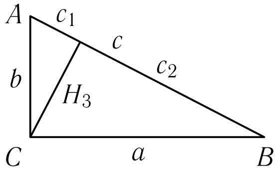


Рис. 2.4

**Решение.** В начале предположим, что треугольник прямоугольный. Вычислим среднее расстояние до оси $x$:

$$\frac{2}{ab}\int\limits_0^a \int\limits_0^{b-\frac{b}{a}x} y\,dy\,dx = \frac{2}{ab}\int\limits_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^{b-\frac{b}{a}x} dx = \frac{1}{ab}\int\limits_0^a \left(b - \frac{b}{a}x\right)^2 dx = \frac{1}{ab}\frac{a}{b}\int\limits_0^b v^2\,dv = \frac{b}{3}.$$

Аналогично среднее расстояние до оси $y$ равно $\frac{a}{3}$. Для того, чтобы вычислить среднее расстояние до гипотенузы, проведем высоту $H_3$. Тогда в каждом из получившихся прямоугольных треугольников среднее расстояние до гипотенузы равно $H_3/3$. Поэтому

$$\frac{2}{cH_3}\left(\frac{H_3}{3}\frac{H_3c_1}{2} + \frac{H_3}{3}\frac{H_3c_2}{2}\right) = \frac{H_3}{3}.$$

Вычисление для произвольного треугольника сводится к случаю прямоугольного треугольника после проведения одной из высот. $\square$

Есть ряд серьезных вопросов, возникающих сейчас, а обсудим мы их позже. Один из них — так называемая измеримость: есть странные множества $A \subset \Omega$ (даже если $\Omega$ — единичный интервал $(0, 1)$), которые не имеют разумно определенного объема (или длины). Вообще, как измерить объем множества $A$ в непрерывном пространстве? Это не обязательно множество, которое достаточно трудно описать (например, канторовский континуум $\mathcal{K}$ имеет корректно определенную длину), но вычисление объема, площади или длины лежит за границами возможностей стандартного интегрирования по Риману. (На самом деле корректно определенная длина множества $\mathcal{K}$ равна нулю.) Чтобы изложить целостную теорию, необходимо прибегнуть к так называемому интегрированию по Лебегу, названному в честь А. А. Лебега (1875—1941), известного французского математика. (Будучи человеком очень простого происхождения, Лебег стал математиком высокого класса, что было необычно для того времени. Он славился безупречными и элегантными докладами и статьями.) В свою очередь, для интегрирования по Лебегу необходимы понятия сигма-алгебры и сигма-аддитивной меры, которые глубоко обобщают понятия длины, площади и объема — частные случаи общей концепции меры. Эти вопросы будут обсуждаться в следующих томах.

Теперь обсудим такой вопрос: а что будет, если распределение массы неравномерно? Этот вопрос имеет не только теоретический интерес. Во многих практических моделях $\Omega$ — это неограниченное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ и объем этого множества бесконечен (например, это все пространство $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ при $d = 1$). Тогда знаменатель $v(\Omega)$ в формуле (2.1.1) бесконечен. Выход из этой ситуации следующий: рассмотрим такую функцию $f \geqslant 0$, что $\int\limits_\Omega f(x)\,dx = 1$, и положим

$$\mathsf{P}(A) = \int\limits_A f(x)\,dx, \quad A \subseteq \Omega$$

(ср. с (2.1.3)). Такая функция $f$ интерпретируется как плотность распределения вероятностей (п. р. в.). Далее в задачах возникают следующие естественные и важные примеры.

*Равномерное распределение* на интервале $(a, b)$, $a < b$: здесь $\Omega = (a, b)$ и

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I(a < x < b). \tag{2.1.4а}$$

*Гауссовское*, или *нормальное*, *распределение* с $\Omega = \mathbb{R}$ и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.4б}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ — параметры, определяющие распределение.

Графики нормальных п. р. в. на интервале около начала координат и на удалении от него приведены на рис. 2.5, 2.6.

Это известная кривая, о которой великий французский математик А. Пуанкаре (1854—1912) сказал: «Экспериментаторы думают, что это математическая теорема, а математики верят, что это экспериментальный факт».

*Экспоненциальное распределение*: здесь $\Omega = \mathbb{R}_+$ и

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x \geqslant 0), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.4в}$$

Параметр $\lambda > 0$ определяет распределение.

Графики экспоненциальных п. р. в. показаны на рис. 2.7.

Обобщение функции (2.1.4в) — это *гамма-распределение*. Здесь снова $\Omega = \mathbb{R}_+$ и п. р. в. равна

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I(x \geqslant 0) \tag{2.1.4г}$$

с параметрами $\alpha$, $\lambda > 0$. Напомним, что $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ (гамма-функция), здесь это нормирующая постоянная. (Напомним также, что для по-

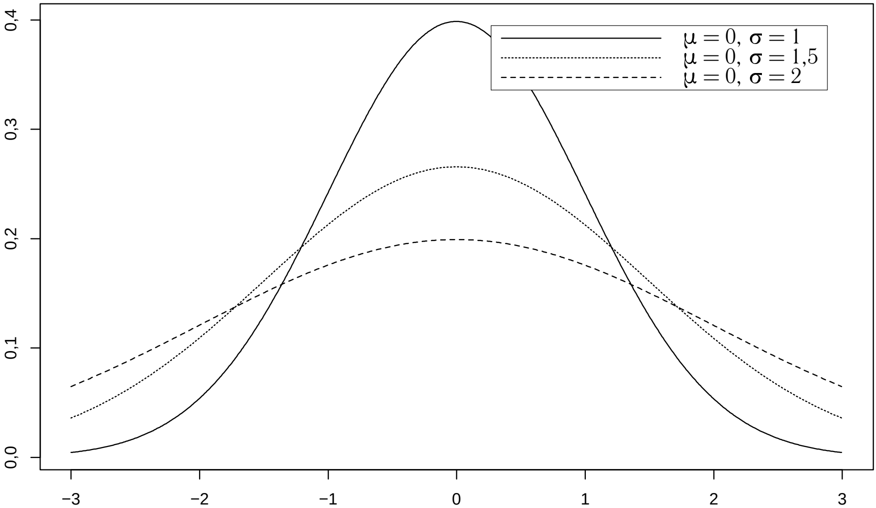


Рис. 2.5. Плотности нормального распределения, I

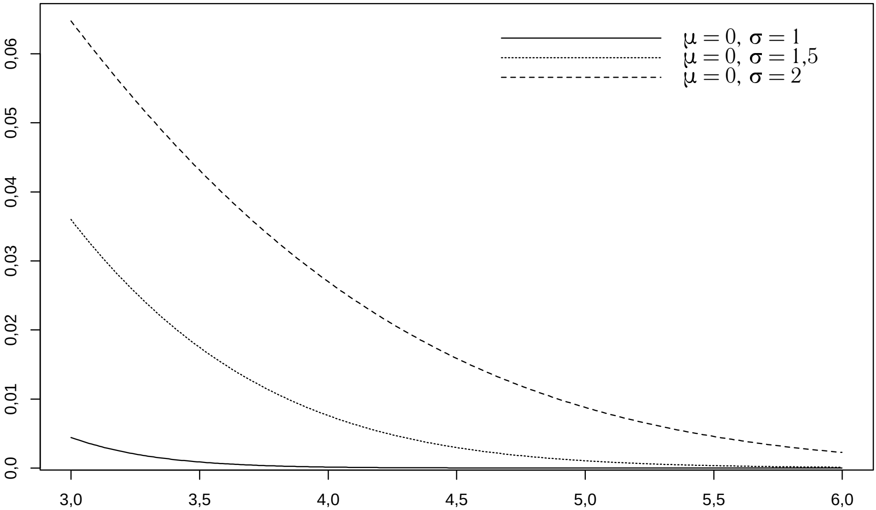


Рис. 2.6. Плотности нормального распределения, II

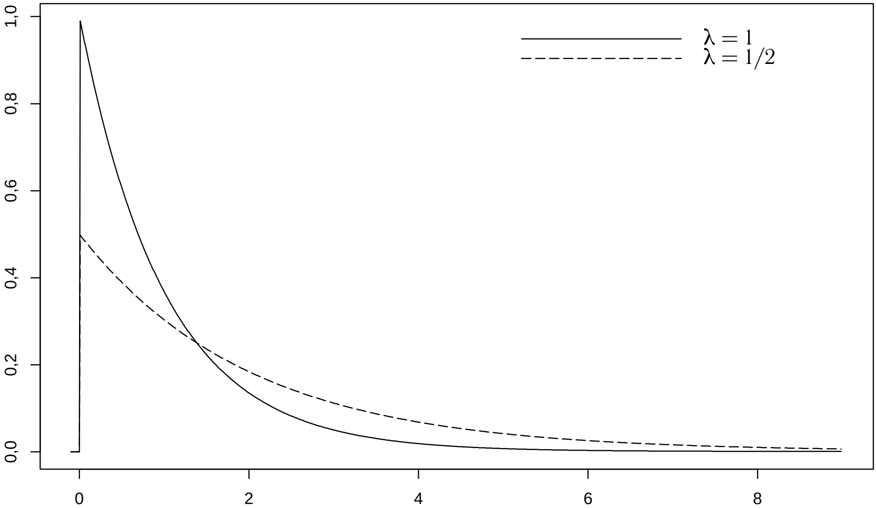

Рис. 2.7. Плотности экспоненциального распределения

ложительного аргумента $\Gamma(n)=(n-1)!$; вообще $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ для $\alpha>1$.) Гамма-распределение играет выдающуюся роль в статистике и будет часто возникать в последующих главах. Графики гамма-п. р. в. показаны на рис. 2.8.

Другой пример — это *распределение Коши*, для которого $\Omega=\mathbb{R}$ и

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\tau}{\tau^2+(x-\alpha)^2},\qquad x\in\mathbb{R}, \tag{2.1.4д}$$

с параметрами $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\tau>0$. Интересно, что распределение Коши открыл Пуассон в 1824 г., пытаясь построить контрпример к центральной предельной теореме (ЦПТ). В задаче 2.1.21 мы покажем, что нормированные суммы слагаемых, имеющих распределение Коши, не могут сходиться к гауссовскому пределу, как предписывает ЦПТ. Графики п. р. в. Коши приведены на рис. 2.9.

Огюстен Коши был стойким роялистом и ревностным католиком и, в отличие от многих выдающихся французских ученых того периода, имел сложные отношения с республиканским режимом. В 1830 г., во время одной из французских революций XIX столетия, он добровольно отправился в ссылку в Турин и Прагу, где давал частные уроки математики наследникам королевской семьи Бурбонов. Его избрание во Французскую академию состоялось лишь в 1838 г., когда он вернулся в Париж.

Гауссовское распределение будет подробно изучаться далее. На данном этапе мы только приведем его обобщение на многомерный случай, когда

$\Omega = \mathbb{R}^d$ и

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu},\ \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\rangle\Big). \qquad (2.1.5)$$

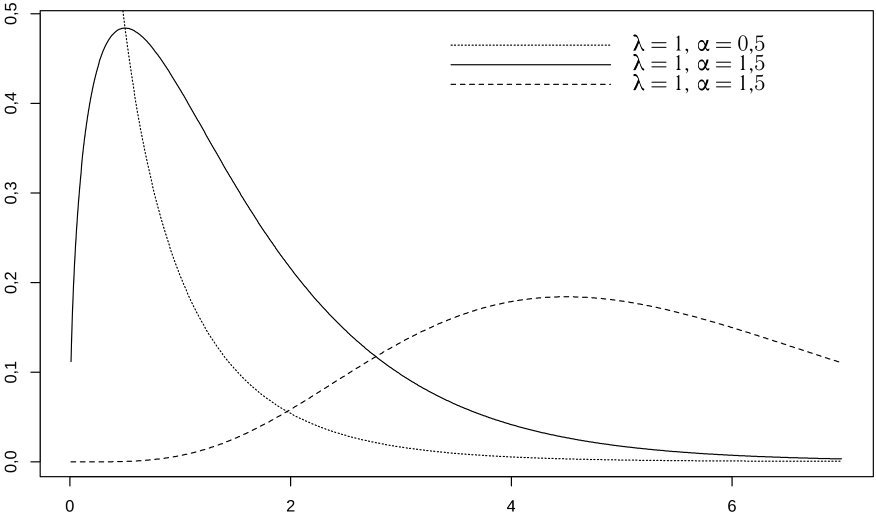


Рис. 2.8. Плотности гамма-распределения

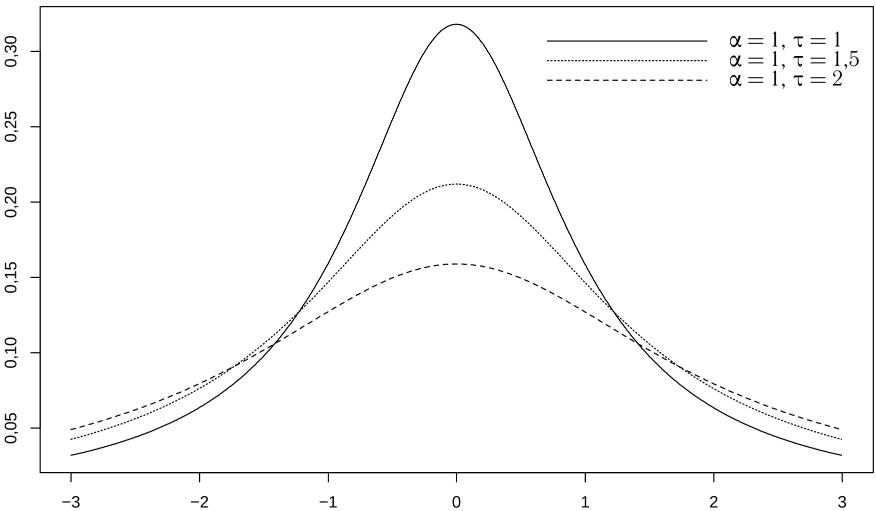


Рис. 2.9. Плотности распределения Коши

Здесь $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — действительные $d$-мерные векторы:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d,$$

а $\Sigma$ — обратимая положительно определенная $(d \times d)$-действительная матрица с определителем $\Sigma > 0$ и обратной матрицей $\Sigma^{-1} = (\Sigma^{-1}_{ij})$. (Матрица $\Sigma$ называется *положительно определенной*, если ее можно представить в виде произведения $\Sigma = AA^*$, и строго положительно определенной, если в этом представлении матрица $A$ *обратима*, т. е. существует *обратная матрица* $A^{-1}$ (в этом случае обратная матрица $\Sigma^{-1} = A^{*-1}A^{-1}$ также существует). Легко видеть, что положительно определенная матрица $\Sigma$ всегда симметрична (эрмитова), т. е. $\Sigma^* = \Sigma$. Значит, положительно определенная матрица имеет ортонормированный базис из собственных векторов, а ее собственные значения неотрицательны (положительны, если она строго положительно определена).) Далее, $\langle\ ,\ \rangle$ означает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$:

$$\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}, \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} (x_i - \mu_i)\Sigma^{-1}_{ij}(x_j - \mu_j).$$

Плотность распределения вероятностей указанного вида называется *многомерным нормальным* или *гауссовским* распределением.

Как и прежде, возникает вопрос: функции $f$ какого вида могут быть п. р. в.? (Типичный пример — функция $f(x) = I(x \in (0, 1) \setminus \mathcal{K})$, где $\mathcal{K} \subset (0, 1)$ — канторово множество. Здесь $f \geqslant 0$ по определению, но как определить $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$?) И снова ответ можно найти в теории интегрирования по Лебегу. К счастью, в «реалистичных» моделях такие проблемы возникают редко и остаются в тени других более практических вопросов.

Итак, с этого момента и до конца главы наша базовая модель такова, что исходы $\omega$ пробегают «дозволенные» подмножества $A \subseteq \Omega$ (такие подмножества называются измеримыми и будут введены позже). Очень часто в качестве $\Omega$ будет выступать $\mathbb{R}^d$. Вероятность $\mathsf{P}(A)$ можно вычислить для любого такого множества $A$ (называемого *событием* из $\Omega$) как

$$\mathsf{P}(A) = \int\limits_A f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{2.1.6}$$

Здесь $f$ — заданная п. р. в., $f \geqslant 0$ и $\int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1$.