

Предисловие

Этот том, как и предшествующий ему том I, был задуман с намерением дать студентам Кембриджского университета возможность проверить их уровень подготовки к экзаменам (которые на университетском жаргоне называются «Математические тренажники»: см. приложение II в конце тома). Однако, как и в первом томе, в процессе подготовки появилась и другая цель: показать широкой публике, как вероятность, статистика и другие подобные курсы изучаются в Кембриджском университете и какой уровень подготовки достигается к концу такого обучения. Следует заметить, что специфический предмет этого тома, цепи Маркова и их применения, переживает последнее время большой подъем. Многие замечательные теоретические результаты были получены сравнительно недавно в этой области, которая только двадцать лет назад или около того рассматривалась многими вероятностниками как «мертвая зона». Еще более удивительно то, что активную роль в развитии этой области сыграли в первую очередь прикладные исследования. Мотивируемые все увеличивающимся количеством проблем, возникающих в таких, казалось бы, различных областях, как информатика, биология и финансы, «прикладные» математики вторглись на территорию, которую традиционно занимали немногие «чистые» математики, все еще продолжавшие улучшать старые результаты, убирая или добавляя то или иное условие в теоремах, читать которые становилось все труднее, не говоря уже о том, чтобы их применять. Поэтому мы не могли не почувствовать себя обязанными включить некоторые из этих относительно новых идей в нашу книгу, несмотря на то, что соответствующие параграфы имеют мало общего с нынешними кембриджскими курсами. Тем не менее мы старались по возможности придерживаться кембриджского подхода (в нашем понимании) на протяжении всего тома.

В целом складывается ощущение, что современную теорию цепей Маркова можно сравнить с огромным и сложным живым организмом, который внезапно проснулся из зимней спячки и в насто-

ящее время находится в стадии активного потребления и усвоения свежей пищи, поставляемой плодородными полями, процветающими благодаря замечательным климатическим условиям. И, как часто бывает в природе, некоторые части такого организма претерпевают серьезные изменения: они либо становятся более важными, либо теряют свое значение по сравнению с предыдущей стадией развития. Кроме того, некоторые части, например старая кожа, могут быть сброшены или заменены на новые, лучше приспособленные к внешнему миру. В этом смысле нашу книгу можно сравнить с фотографическим снимком этого гиганта с определенного расстояния и в некотором ракурсе. Мы не можем показать все существо целиком (для этого оно слишком велико и слишком быстро движется), и многие детали в рамках нашей фотографии получаются смазанными. Но тем не менее мы надеемся, что в целом картина получится новой и свежей.

В то же время наша цель заключалась в том, чтобы не упустить те темы, которые в первую очередь важны в курсе, посвященном основным понятиям цепей Маркова. Мы здесь имеем в виду те разделы теории, которые особенно стимулируют к размышлениям новичков и, что неудивительно, обычно предоставляют плодотворную почву для постановки подходящих для экзаменов задач. В общем, весь материал теории цепей Маркова, который оказался полезным на кембриджских экзаменах в 1991—2020 гг., включен в эту книгу.

Экзаменационные задачи сами по себе, наряду с их решениями, составляют важную часть этой книги, так же как и предыдущего тома. Мы осознаем, что этот шаг не прибавил счастья некоторым кембриджским коллегам, предпочитавшим сохранить этот материал «для служебного пользования». Тем не менее, с нашей точки зрения, теория цепей Маркова представляет интерес для представителей многих дисциплин (да и широкой публики в целом). Многие люди, имеющие отношение к различным сферам академической жизни, желали бы изучить как можно скорее и в той степени, в какой это возможно для них, основы этой теории и ее применения и использовать эти знания в своей работе. Большинство из них не имеет математической базы, которую принято считать стандартной для кембриджских студентов-математиков (в российских условиях мы могли бы сказать — для студентов-математиков в Московском, Петербургском и Новосибирском университетах). Совершенно естественный путь для них — пройти через большое число задач, снабженных комментариями и решениями. Подборка задач кем-

бриджских «Математических треножников» с решениями исключительно полезна с этой точки зрения, и желание спрятать эти задачи под замок и использовать исключительно для кембриджских студентов кажется несколько эгоистичным, хотя и вполне понятным.

В связи с этим хотелось бы рассказать следующую историю о Чарльзе Бэббидже (1791—1871), английском математике, который провел большую часть своей жизни, конструируя счетные машины (механические устройства, которые можно считать прототипами современных компьютеров). В 1828—39 гг. Бэббидж занимал престижное кресло Лукасианского профессора математики в Кембриджском университете (с 1979 по 2009 год этот пост занимал Стивен Хокинг, в настоящее время Лукасианским профессором является Майкл Гейтс (р. 1961), специалист по полимерам, коллоидам и т. д.); с 1840 г. он жил и работал в основном в Лондоне. В то время улицы Лондона были полны бродячих шарманщиков (часто итальянских подростков с прекрасными голосами). Их музицирование пришлось не по вкусу некоторым жителям Лондона, и было предложено ввести систему лицензий, которые бы разрешали играть только в назначенное время и в определенных местах. В 1860 г. Бэббидж представил в суд петицию, в которой он требовал, чтобы «никто не имел права играть на шумных инструментах в местах, где находятся люди, занимающиеся серьезной работой», по сути запрещавшую любую уличную музыку. Хотя суд и решил, что такого запрета быть не должно, и выступил против системы лицензий, он постановил, что Бэббидж (равно как и любой житель) имеет право попросить любого музыканта удалиться из района, где он проживает.

Тем не менее, как уже было сказано в первом томе, мы с глубоким уважением благодарим многочисленных бывших и настоящих сотрудников факультета математики Кембриджского университета, которые внесли свой вклад в собрание задач и решений «Треножников», относящихся к цепям Маркова и их приложениям.

Нужно отметить, что изучение (или сопровождение процесса изучения) большого количества однотипных задач (с решениями или без них) может быть довольно скрупулезным. Довольно распространенная среди математической части научного общества точка зрения состоит в том, что наиболее продуктивный способ изучения математики — это переварить доказательства ряда теорем, достаточно общих, чтобы быть полезными на все случаи жизни, а потом рассмотреть примеры, которые иллюстрируют эти теоремы (авторы

этой книги обучались именно по такому образцу). Проблема в том, что такой метод идеально подходит для ученых с математическим складом мышления, но, скорее всего, не годится для всех остальных.

С другой стороны, все большее число студентов (в основном, но не всегда, с нематематической базой подготовки) сильно противится — по крайней мере психологически — любым попыткам провести «строгие» доказательства основных теорем. Более того, вычисления «вручную», которые часто нужны в задачах с прозрачной идеей решения, также становятся все менее популярными среди студентов новых поколений, для которых использование персонального компьютера или ноутбука так же естественно, как использование зубной щетки. Авторы могут привести примеры из своего лекционного опыта того, что аудитория зачастую доверяет компьютерным вычислениям гораздо больше, чем формальным доказательствам. Это действительно является проблемой, особенно когда лекция читается для широкой аудитории. Конечно, такое неприятие в какой-то мере обоснованно, хотя лично мы считаем, что изучение доказательства сходимости к стационарному распределению марковской цепи более продуктивно, чем изучение пары дюжин численных примеров, которые подтверждают этот факт. Однако даже искусственный пример, в котором переходная матрица размерности 4 на 4 построена таким образом, что все собственные числа «хорошие» (одно равно 1, одно может быть найдено из соображений симметрии или иных «реалистических предположений», а остальные два — корни квадратного уравнения), может дать осечку, а иногда даже и обернуться против составителя, в то время как при помощи пакета программ эту задачу можно решить элементарно. Тем не менее наше изложение в этом томе не принимает такие вещи во внимание; мы полагаем, что это проявится в стиле написания будущих книг.

Заметим, что на нашу книгу частично оказали влияние книги [N] и [St1]. Вдобавок многие бывшие и нынешние сотрудники статистической лаборатории DPMMS Кембриджского университета внесли свой вклад в создание определенного стиля изложения (мы говорили об этом во введении к первому тому). Мы с большим удовольствием назовем имена Дэвида Вильямса, Фрэнка Кэлли, Джеффри Гримметта, Дагласа Кеннеди, Джеймса Норриса, Гарета Робертса и Колина Спэрроу: мы слушали их лекции, изучали написанные ими курсы лекций и работали с их примерами. Из сотрудников университета Свонзи большую помощь и поддержку нам оказали Алан Хоукс, Обри Трумэн и опять-таки Дэвид Вильямс.

Советы и комментарии Роберта Липцера существенно повлияли на содержание гл. 3. Мы выражаем особую благодарность Эли Бассулзу, который прочитал ранний вариант книги и сделал многочисленные замечания, направленные на улучшение текста. Его помощь вышла за обычный уровень участия добросовестного читателя в подготовке математического текста и оказала авторам огромную услугу.

Мы благодарим Сару Шеи-Симондз и Евгению Кельберт за улучшение стиля книги. Мы также признательны Джону Хейгу, указавшему на ряд неточностей в английском издании. Мы особенно благодарны Юрию Николаевичу Тюрину, инициатору перевода этой серии книг на русский язык.

Книга содержит четыре главы, разбитые на параграфы. Главы 1 и 2 включают материал университетских кембриджских курсов, но выходят далеко за их рамки в различных аспектах теории марковских цепей.

Вторая часть в основном ориентирована на аспирантов и исследователей, интересующихся приложениями цепей Маркова. В гл. 3 рассматриваются приложения цепей Маркова к теории очередей и сетям с очередями, анализу текстов, высокочастотному трейдингу, динамике популяций и математической генетике. В гл. 4 рассматриваются избранные вопросы математической статистики, в которых структура марковской цепи проясняет как постановку задачи, так и ее решение. Как правило, эти вопросы очевидны для независимых выборов, но становятся весьма техничными в общей постановке.

Текст русского издания был значительно переработан и дополнен.

Библиография содержит монографии, иллюстрирующие динамику развития теории случайных процессов, в частности цепей Маркова, и параллельный прогресс в статистике. Ссылки на необходимые научные статьи содержатся в самом тексте.