ОЖЕРЕЛЬЕ ИНДРЫ

Видение Феликса Клейна

ОЖЕРЕЛЬЕ ИНДРЫ

Видение Феликса Клейна

Дэвид Мамфорд, Дэвид Райт, Кэролайн Сирис

С рисунками Ларри Гоника

Перевод с английского
под редакцией О. В. Шварцмана

Издательство МЦНМО
2011

УДК 517.53
ББК 22.161.5
М22

Перевод на русский язык:
Н. В. Цилевич (предисловие, введение, главы 1, 2)
и Т. Э. Кренкель (главы 3–12)

Мамфорд Д., Райт Д., Сирис К.
М22 Ожерелье Индры. Видение Феликса Клейна /
Пер. с англ. под ред. О. В. Шварцмана. —
М.: Издательство МЦНМО, 2011. — 416+xxiv с.
ISBN 978-5-94057-800-0

В этой научно-популярной книге (ее старший автор — выдающийся американский математик Д. Мамфорд, многие книги которого переведены на русский язык) рассказывается об одном из важных для математики видов фракталов — так называемых предельных множествах клейновых групп. Изложение рассчитано на неспециалистов — старшеклассников и студентов, интересующихся математикой. Книга богато иллюстрирована. В большинстве глав приведены указания к самостоятельным компьютерным экспериментам.

ББК 22.161.5

Translation from the English language edition:
Indra's Pearls. The Vision of Felix Klein
by David Mumford, Caroline Series, and David Wright.
Cambridge University Press, 2002.

Ожерелье Индры. Видение Феликса Клейна
Дэвид Мамфорд, Дэвид Райт, Кэролайн Сирис

Подписано в печать 15.04.2011. Формат 70×100/16.
Гарнитура ITC Charter. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Издание осуществлено при участии ООО «Пиксел».

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

ISBN 0-521-35253-3 (engl.)
ISBN 978-5-94057-800-0

© Cambridge University Press, 2002
© Издательство МЦНМО, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода vii

Предисловие ix

Введение xix

Глава 1. Язык симметрии 1

Глава 2. Прекрасная фикция 39

Глава 3. Двойные спирали и преобразования Мёбиуса 69

Глава 4. Танец Шоттки 105

Глава 5. Фрактальная пыль и бесконечные слова 131

Глава 6. Ожерелье Индры 169

Глава 7. Светящееся кружево 209

Глава 8. Играем с параметрами 237

Глава 9. Никто не застрахован от неожиданностей 283

Глава 10. Сквозь трещины 325

Глава 11. Через границы 369

Глава 12. Эпилог 391

Предметный указатель 413

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Топологическая группа комплексных дробно-линейных преобразований сферы Римана называется группой Мёбиуса, а любая ее дискретная подгруппа — клейновой группой.

Клейновы группы занимают центральное место в программе Тёрстона геометризации трехмерных многообразий (глава 12). Клейновы группы бывают двух типов: элементарные, или почти абелевы (глава 1–3), и неэлементарные, т. е. такие, которые содержат свободную группу с двумя образующими. В 1870 году Шоттки построил первые примеры свободных клейновых групп с двумя образующими (глава 4). И эта оригинальная книга с картинками почти целиком посвящена увлекательным приключениям групп Шоттки. В чем ее необычность?

С клейновой группой связаны два друг друга дополняющих подмножества сферы Римана: регулярное множество и предельное множество. Регулярное множество — это наибольшее открытое подмножество сферы, на котором группа действует дискретно как группа мёбиусовых преобразований. Оно может оказаться и пустым. У неэлементарной клейновой группы предельное множество всегда непусто, но, как правило, является сложным фракталом. По-видимому, долгое время предельное множество считалось слишком сложным, чтобы быть интересным, и основное внимание уделялось регулярному множеству.

Но все меняется, и, открыв эту книгу, вы быстро поймете, что рассказ о клейновых группах ведется в ней от лица их предельных множеств. На мой взгляд, такое решение оказалось удачным и с методической, и с научной точки зрения.

На русский язык книгу перевели Н. В. Цилевич (предисловие, введение, главы 1, 2) и Т. Э. Кренкель (главы 3–12).

О. В. Шварцман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что это за книга?

Это книга о серьезной математике, однако мы писали ее в надежде заинтересовать как можно более широкий круг читателей. В ней описана история того, как с помощью компьютера мы исследовали семейство исключительно симметричных форм, возникающих при взаимодействии двух спиральных движений очень специального вида. В любом масштабе — от очень большого до очень маленького — эти формы являют сложные фрактальные структуры. Понять, как они выглядят, мечтал век тому назад великий немецкий геометр Феликс Клейн. Иногда взаимодействие двух спиральных движений вполне регулярно и гармонично, иногда оно совершенно беспорядочно, а иногда — и это самый интересный случай — его структура формируется слой за слоем, балансируя на самой грани хаоса.

Мы продолжали наши исследования, и рисунки, выдаваемые компьютером, были настолько поразительны, что нам захотелось рассказать нашу историю так, чтобы ее могли оценить читатели за пределами узкого круга специалистов. Получить представление об этих рисунках можно, взглянув на схему, приведенную на последней странице книги. Математики часто используют слово «красивый» применительно к своим доказательствам и идеям, но в данном случае наше мнение подкреплено беспристрастными отзывами многих людей, заведомо не являющихся математиками. Визуальная красота этих картинок — лишь внешняя оболочка, за которой скрываются важные и изящные математические идеи, и мы стремились донести до читателя хотя бы часть этой внутренней эстетики. В книге нет религиозных мотивов, однако поразительно, насколько точно наши математические построения воспроизводят древнюю буддистскую метафору сети Индры, спонтанно создающей отражения внутри других отражений, бесконечную череду миров внутри других миров.

Чтобы добраться до большей части математики, нужно пройти длинный и нелегкий путь, тщательно выстраивая свой сло-

варь и совершенствуя навыки, учась понимать мир в отвлеченных терминах. Но оказалось, что математика, стоящая за нашими рисунками, требует не столь уж многих предварительных знаний. Если вы уверенно владеете школьной алгеброй, то все, о чем мы пишем, должно быть вам доступно. Более того, имея достаточно времени и терпения, вы сможете написать программы для создания своих собственных рисунков. Но даже если вы просто пролистаете книгу, разглядывая картинки, вы получите представление о нашем увлекательном путешествии. Наша мечта — убедить читателей в том, что математика — не чуждое и странное занятие, а очень человеческое исследование структур окружающего нас мира, в основе которого лежат игра, удивление и красота.

И как мы решили ее написать

История Дэвида М. Эта книга писалась более двадцати лет. Проект начался, когда в 1979–80 гг. Бенуа Мандельброт посетил Гарвард. В то время он изучал связанные с итерациями преобразований комплексной плоскости «фракталы», известные как множества Жюлиа, а также ныне знаменитое «множество Мандельброта». Мандельброт рассматривал и некоторые известные еще в XIX веке рисунки, получаемые бесконечным повторением простых отражений относительно окружностей; такими рисунками был зачарован Феликс Клейн. Мы с Дэвидом Р. объединили наши знания и стали развивать эти идеи дальше в духе Клейна. Вскоре компьютер начал выдавать рисунки, подобные тем, которые встретятся вам на страницах этой книги.

Что делать с этими рисунками? Возникли два соображения. Во-первых, было ясно, что опубликовать их обычным образом невозможно. У нас не было теорем, только наводящие на размышления рисунки. Они убедительно свидетельствовали в пользу многих гипотез и манили к дальнейшим исследованиям, но полноценной монетой в то время считались лишь теоремы, и по существовавшим правилам игры журналы публиковали только их.[1] Вторая мысль была не менее пугающей: вот кусок настоящей математики, который можно объяснить далеким от математики друзьям. Мы поддались этому опасному соблазну, но осуществить проект оказалось *гораздо, гораздо* сложнее, чем мы предполагали.

[1]Позже ситуация изменилась: Клаус и Алиса Петерс начали издавать журнал «Экспериментальная математика».

В течение десяти лет мы то принимались за книгу, то оставляли попытки. Нам сильно мешало одно обстоятельство: когда мы встречались, чтобы поработать над текстом, намного интереснее было получать новые рисунки, чем писать то, что в компьютере Дэвида Р. называлось `TheBook`. Я с удовольствием вспо-

минаю, как в Миннеаполисе под ледяными порывами ветра мы тащились к бункероподобному суперкомпьютеру, чтобы продолжить наши вычисления. Единственным, кто сохранял веру в проект, был наш преданный и терпеливый редактор Дэвид Трана.

С мертвой точки дело сдвинулось, когда чуть более десяти лет назад к проекту присоединилась Кэролайн. Нам потребовалось время, чтобы научиться писать вместе, не говоря уж о том, что надо было примирить между собой три враждующие операционные системы. Но в конце концов наши издатели, родственники и друзья заявили, что хорошенького понемножку и пора переходить к делу.

Знаете, какие задачи я особенно ненавидел в начальной школе? Задачи про землекопов. Бен может выкопать канаву за 4 часа, Нед за 5, а Тед за 6. За сколько часов они выкопают канаву, работая вместе? Учебник скажет вам, что за 1 час 37 минут и 17 секунд. Чушь! Мы получили неопровержимые доказательства того, что правильным ответом будет $4 + 5 + 6 = 15$ часов. Это глубокий принцип, связанный не только с математикой, но также с психологией, социологией и экономикой. У нас есть замечательное доказательство, но, несмотря на щедрость издательства Cambridge University Press, нам не хватило бы места, чтобы изложить его в этой книге.

История Дэвида Р. У этой книги тысяча начал, но долго не было ни одного конца. Хотя лично для меня ее первое начало состоялось в 1979 г., когда мой друг и товарищ по аспирантуре Гарвардского университета Майк Стиллман рассказал мне о задаче, поставленной его учителем Дэвидом Мамфордом. Возьмем два простых преобразования плоскости и применим к данной точке все возможные комбинации этих преобразований. Как будет выглядеть полученное множество точек?

Разумеется, речь шла не только о том, чтобы размышлять об этих множествах, но и о том, чтобы рисовать их на компьютере. Майк знал о моем интересе к дискретным группам, и мы оба разделяли интерес к программированию. Кроме того, благодаря еще одному другу (тоже аспиранту) Максу Бенсону, я был знаком с очень хорошей библиотекой программ на языке Си для работы с классическим графическим терминалом «Tektronix 4014». Восполнить единственный недостающий ингредиент помогла своеобразная особенность обучения в Гарварде: после сдачи квалификационных экзаменов у меня не было других дел, кроме как писать диссертацию. Я очень хорошо помню это ощущение огромного количества свободного времени. Как я с удивлением обнаружил по прошествии многих лет, это чувство я испытывал тогда в последний раз.

Так или иначе, но исключительно ради развлечения я присоединился к Дэвиду Мамфорду, который в то время создавал лабораторию компьютерных программ для визуализации клейновых групп. Это было увлекательным математическим приключением. Случилось так, что летом 1980 года нам выпала уникальная возможность поделиться с миром результатами наших компьютерных исследований на исторической конференции в Бодуэн-колледже, на которой Тёрстон представил свои революционные результаты по трехмерной топологии и гиперболической геометрии. Мы установили в Мэне терминал «Tektronix» и через модем, акустически связанный с телефоном, на сумасшедшей скорости 300 бод продемонстрировали аудитории несколько предельных множеств. Реакция публики на извивающиеся по экрану предельные кривые была весьма положительной, и после конференции еще несколько математиков занялись написанием компьютерных программ для изучения различных аспектов клейновых групп.

Так мы оказались перед необходимостью написать текст с объяснениями наших алгоритмов и вычислений. Однако мне уже давно пора было доделывать диссертацию. Около 1981 г. мне посчастливилось познакомиться и пообщаться с новым гарвардским аспирантом по имени Кёртис Макмуллен, который прекрасно знал компьютерные системы Исследовательского центра Томаса Дж. Уотсона компании IBM, поскольку подрабатывал там в летние каникулы. Нам удалось заманить Кёртиса в проект, и по приглашению и при поддержке Бенуа Мандельброта они с Дэвидом М. изготовили серию прекрасных черно-белых рисунков предельных множеств исключительно высокого качества. Я хотел бы выразить Кёртису свою искреннюю благодарность за помощь в то время и последующую многолетнюю дружбу; он оказал сильное влияние на мое участие в проекте.

К сожалению, когда мы разъехались по разным университетам, имеющим разные возможности в смысле компьютерной техники, стало трудно поддерживать программы в рабочем состоянии и находить достаточно энергии для продолжения проекта. Я хотел бы поблагодарить за поддержку многих людей, в том числе моего друга Билла Голдмана, с которым мы работали в Массачусетском технологическом институте, а также Питера Татиана и Джеймса Рассела, студентов этого института, сотрудничавших со мной, Эла Мардена и всех сотрудников Геометрического центра, Чарльза Мэтьюза, с которым мы работали в университете штата Оклахома, и многих других математиков, занимающихся клейновыми группами. Я хотел бы также выразить признательность Джиму Когделлу и Юго-Западному фонду Белла за финансовую поддержку на завершающей стадии.

Но самое серьезное и окончательное начало этой книги состоялось в тот момент, когда Кэролайн согласилась внести в нее свой вклад, состоящий как из ее собственных важных результатов в этой области, так и ее умения излагать материал. Кроме того, она смогла хотя бы отчасти противостоять склонности двух других авторов заниматься программированием в поисках очередной потрясающей картинки во время наших редких встреч для работы над книгой. Наконец мы действительно написали какой-то текст.

За годы работы над этим проектом мы стали свидетелями революционных изменений в вычислительной технике и компьютерной графике, и нам было трудно за ними поспевать. Я хотел бы поблагодарить программистов всего мира за создание такого замечательного бесплатного программного обеспечения, как TEX, GNU Emacs, X Window и Linux, без которых мы не смогли бы довести этот проект до его текущего окончательного состояния.

За годы работы над проектом в моей жизни произошли важнейшие события, потери и обретения: утрата моей матери Элизабет, моего отца Уильяма и моей бабушки (и главы семейства) Элизабет, рождение дочерей Джулии и Александры. В надежде на будущие начала я посвящаю свою долю участия в этой книге тем, кто вместе с нами восторгается восхительной способностью человеческого ума решать сложные загадки и проникать в суть вещей. Программировать математические идеи — занятие одновременно раздражающее и необычайно занимательное. Каждая мелочь дает пищу для увлекательных размышлений. Но, пожалуй, на этом я закончу.

История Кэролайн. Впервые я увидела несколько рисунков Дэвида М. и Дэвида Р. в середине 1980-х гг. — мой коллега Дэвид Эпштейн заполучил их во время одного из периодических визитов в Геометрический центр в Миннеаполисе. Я была потрясена их красотой — они напоминали мне плетение кружев, которым я хотела бы заняться, будь у меня в запасе еще одна жизнь.

Я считала, что про эти рисунки всем все понятно и не обращала на них особого внимания до тех пор, пока чуть позже мы с Линдой Кин не стали оглядываться вокруг в поисках нового проекта. В течение многих лет я работала с фуксовыми группами (см. гл. 6), и мне хотелось заняться чем-нибудь, что привело бы меня в царство Клейна, где в то время кипела деятельность, связанная с развитием удивительных новых идей Тёрстона о трехмерной неевклидовой геометрии (см. гл. 12). И тут мне попался на глаза препринт[2] Дэвида Р. с описанием исследований, которые изложены в гл. 9. Я сказала Линде, что, кажется, это именно то, что нам нужно.

[2] *D. Wright*. The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori (неопубликованный препринт).

Первый год работы был сплошным разочарованием. Всматриваясь в картинки, подобные тем, что приведены в гл. 9, мы никак не могли ухватить суть происходящего. И вдруг однажды утром одну из нас осенило. Мы провели вручную некоторые вычисления, и они казались обнадеживающими. Поэтому мы попросили Дэвида Р. нарисовать для нас изображение того, что мы называли «лучами вещественных следов». Полученный от Дэвида рисунок представлял собой зачаточную версию последней картинки в этой книге — той, которую мы назвали «Здесь кончается радуга». Но для меня это было скорее «начало радуги» — один из определяющих моментов всей моей математической жизни. Мы действовали совершенно наугад, не имея представления о том, что это за лучи, но зная, что они не имеют никакого права располагаться таким замечательным образом. Было очевидно, что мы наткнулись на что-то важное, и с этого момента я уже была на крючке.

Еще год мы боролись за то, чтобы загнать эти лучи в смирительную рубашку того единственного математического контекста, который мы могли вообразить, но ничего не получалось. И вот однажды я встретила Кёртиса Макмуллена и в беседе с ним упомянула о наших развлечениях. «Вещественный след, — задумчиво протянул он. — Ведь это граница выпуклой оболочки».[3] И эта подсказка сдвинула нас с мертвой точки. Сказанное Кёртисом означало: для того чтобы понять двумерные картинки, мы должны рассматривать трехмерное неевклидово пространство, совершенно в духе Тёрстона. Наконец мы получили возможность проверить хотя бы часть гипотез двух Дэвидов теоретически.

[3]Чуть более подробные объяснения и некоторые рисунки имеются в гл. 12.

Когда Мэри Соммервиль, математик XIX века, получила письмо с предложением перевести и снабдить комментариями великую книгу Лапласа «Небесная механика», она удивилась настолько, что чуть было не вернула письмо обратно, решив, что произошла какая-то ошибка.[4] Не могу сказать, что я была удивлена так же сильно, получив письмо от Дэвида М. с просьбой помочь им с Дэвидом Р. в написании книги об их рисунках, но и рутинным событием это письмо не назовешь. Не исключено, что когда-нибудь я напишу еще одну книгу, но вряд ли мне еще раз выпадет шанс работать над книгой, испытывая такие трудности и такое удовольствие.

[4]К счастью, мужу удалось ее переубедить. Книга стала бестселлером и даже была нелегально издана в Соединенных Штатах!

И не подумайте, что эта книга означает конец истории. Пролистав ее, вы встретите рисунки, на которых представительного вида джентльмен склеивает из кусков резины некое подобие бубликов. По сути весь наш сегодняшний рассказ вертится вокруг «однодырочных бубликов с выколотой точкой». Последние несколько лет я пыталась понять, что произойдет, если у бубли-

ка будет больше дырок. И главное, что я могу пока сказать, — это что в этом случае все гораздо сложнее! Но все те же удивительные структуры, только еще более затейливые и манящие, ожидают, пока мы их приручим.

Я хотела бы поблагодарить Совет по инженерным и физическим научным исследованиям (EPRSC) за щедрую поддержку. Предоставленная им позиция старшего научного сотрудника позволила мне посвятить много времени как математическим, так и литературным аспектам этого смелого начинания.

Руководство для читателя

Эту книгу можно читать на разных уровнях. Как и в большинстве математических книг, материал в ней организован последовательно, однако читать ее лучше не по порядку: сначала просмотреть картинки, затем заглянуть в текст, чтобы понять суть происходящего, и наконец вернуться к отдельным местам, чтобы разобраться в деталях. Мы старались сделать так, чтобы первая часть каждой главы была относительно простой, излагая лишь основные идеи и откладывая технические подробности напоследок. Наиболее технические части обсуждения вынесены в примечания, и при желании их можно опустить. Важный материал, на который мы будем ссылаться в дальнейшем, представлен на врезках.

Первые две главы, о евклидовых симметриях и комплексных числах, содержат материал, с которым, возможно, многие читатели частично знакомы. Мы хотели представить его в форме, соответствующей нашим целям, и в то же время ввести — как можно более ясно, с наглядными рисунками — математическую терминологию, которая будет использоваться на протяжении всей книги. В гл. 3 вводятся отображения, приводящие к двойным спиралям, которые называются преобразованиями Мёбиуса и на которых основаны все наши дальнейшие конструкции. Начиная с этого момента мы рассматриваем все более сложные взаимодействия пары преобразований Мёбиуса, приводящие ко все более запутанным и сложным фракталам, и наконец в гл. 10 и 11 доходим до переднего края наших текущих исследований. Краткую сводку всего изложенного в этой книге отражает схема, приведенная на последней странице.

Слова, имеющие точное математическое значение, при первом появлении в тексте выделены **жирным шрифтом**. Мы не всегда проговаривали все тонкости точного математического определения, но старались не говорить ничего математически некорректного. Мы использовали некоторые собственные термины, но по возможности придерживались стандартной тер-

минологии. Поэтому читателям-нематематикам придется простить нам применение таких терминов, как квазифуксова или модулярная группа, а читатели с математической подготовкой поймут, что мы имели в виду, и без строгих определений.

Книга задумана как практическое руководство по написанию программ, реализующих алгоритмы, которые мы использовали для получения наших рисунков. Для читателей, готовых потратить время на программирование, открывается широчайшее поле деятельности. Здесь есть где развернуться настоящим программистам! Поскольку мы надеемся, что наша книга заинтересует широкий круг читателей, имеющих в своем распоряжении различные компьютерные системы, наши алгоритмы записываются на «псевдокоде» — универсальном (хотя и не существующем) языке программирования.

Как это всегда бывает, нам пришлось отказаться от изложения многих близких математических сюжетов, и каждому, кто захочет серьезно разобраться в тех идеях, которым посвящена эта книга, рано или поздно придется обратиться к более технической литературе. К сожалению, относительно доступных руководств по предельным множествам клейновых групп на данный момент не существует[5], но есть много книг, где обсуждаются базовые вопросы, связанные с симметриями и комплексными числами. Некоторые руководства по комплексному анализу затрагивают тему преобразований Мёбиуса; более подробно они рассматриваются в современных книгах по двумерной гиперболической геометрии. В последней части книги мы цитируем достаточно случайный набор недавних исследовательских статей, которые оказали серьезное влияние на нашу работу. Этот список ни в коем случае не претендует на полноту, но он должен помочь профессиональным математикам сориентироваться в существующей литературе.

[5] Для читателей с математической подготовкой, возможно, лучшим введением в предмет до сих пор является вышедшая в 1923 г. книга Лестера Форда «Автоморфные функции» (русский перевод: М.: ОНТИ, 1936. — *Прим. перев.*).

Наконец, следует сказать несколько слов о наших упражнениях. На них можно не обращать внимания: мы не собираемся ставить оценки за их выполнение и приводить правильные ответы. Эти упражнения были задуманы как темы для самостоятельных изысканий, которые побудят вас лучше разобраться в понравившемся материале. Некоторые из них непосредственно продолжают или поясняют материал, приведенный в основном тексте, а некоторые содержат более глубокие вопросы, не имеющие однозначного ответа. Некоторые из упражнений заведомо являются темами для исследовательских работ. Другие же проясняют детали, необходимые для полного понимания или проверки технических рассуждений. Мы оставляем читателю возможность выбрать упражнения, лучше всего отвечающие его вкусу и математическому опыту.

Благодарности

Прежде всего мы хотели бы поблагодарить нашего художника Ларри Гоника за его уникальную способность иллюстрировать сложные манипуляции с трехмерными объектами с помощью предельно ясных картинок. Мы благодарны сайту университета Сент-Эндрюс, посвященному истории математики, за возможность почерпнуть необходимые исторические сведения; ценные поправки и здоровые порции научного скептицизма мы получали также от наших друзей Дэвида Фаулера и Пэдди Паттерсона. (Разумеется, ответственность за все оставшиеся в тексте ошибки целиком лежит на нас.) Важным источником информации служила также книга самого Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии». «Сутру Хуаянь» мы прочитали в английском переводе Томаса Клири в книге «The Flower Ornament Scripture» (Shambhala Publications, 1993), цитаты из которой приводим с благодарностью. Мы хотели бы выразить признательность математическим факультетам университетов Брауна, штата Оклахомы, Уорика, Гарварда и Миннесоты за их гостеприимство. Мы благодарны за финансовую поддержку Национальному научному фонду (NSF), предоставившему грант Геометрическому центру, и Совету по инженерным и физическим научным исследованиям (EPRSC) за его программу популяризации науки. Наконец, мы выражаем признательность нашему издателю Дэвиду Трана из Cambridge University Press, без постоянного подстегивания и поддержки которого эта книга наверняка никогда не увидела бы свет.

ВВЕДЕНИЕ

> Я открыл явления столь удивительные, что был потрясен… Из ничего я сотворил странный новый мир.
>
> Янош Бойяи

Этими словами молодой венгерский математический гений Янош Бойяи, имевший репутацию лучшего фехтовальщика и лучшего танцора во всей австрийской императорской армии, в 1823 г. сообщил в письме домой о своем открытии неевклидовой геометрии. Действительно, открытие Бойяи стало переломным моментом, и в XIX веке математика постепенно освободилась от долго преследовавшего ее ощущения, что она должна описывать лишь структуры, существующие в «реальном» мире. Эти открытия распахнули множество дверей, и некоторые из них вели непосредственно в новые миры, тщательное исследование которых стало возможным лишь в последние двадцать лет с появлением быстродействующих компьютеров.

Развитие математики в XIX веке было взрывным, подобно промышленной революции. Еще не существовало четкого разделения на чистую и прикладную математику. Одной из главных задач математики было открытие и исследование различных специальных функций (синусов, косинусов, функций Бесселя и др.), с помощью которых описываются физические явления, такие как волны, тепло и электричество. Но интерес к этим функциям не исчерпывался их полезностью для физики. При рассмотрении с более абстрактной точки зрения они начинали жить своей собственной жизнью, обнаруживая интриговавшие многих математиков структуры и явления. Значительная их часть была связана с пониманием того, что же произошло при замене обычных «вещественных» чисел на «комплексные» (см. гл. 2).

Второй важной задачей математики было изучение симметрии. Идея симметричных узоров из повторяющихся фигур стара как сама цивилизация, мы находим их везде — от архитектуры майя до кельтских узоров. Тадж-Махал отражается в воде, его полы выложены шестиугольными плитками. Природа также

изобилует симметрией: крылья бабочки идеально симметричны, а замощение плоскости шестиугольниками мы сравниваем с пчелиными сотами. Уже древние понимали геометрию симметрии: Евклид учит нас, как с помощью измерений определить, что два треугольника конгруэнтны, или «одинаковы», а узоры Альгамбры демонстрируют чуть ли не все математически возможные способы замостить стену повторяющимися фигурами.

Девятнадцатый век стал свидетелем того, как идеи симметрии и подобия кардинальным образом расширились, обозначив аналогии между хорошо знакомым евклидовым миром и другими мирами, подобными новой неевклидовой вселенной Бойяи.[6] Примерно в середине столетия немецкий математик и астроном Август Мёбиус пришел к мысли, что отождествлять можно не только предметы одинаковой формы. Достаточно, чтобы каждая часть одной фигуры была связана с каждой частью другой некоторым Verwandschaft или «соответствием». Одно из таких соответствий, изучавшихся Мёбиусом, пришло из картографии: фигуры можно считать «одинаковыми», если отличия между ними сводятся к тем типам искажений, которые возникают при проектировании круглой поверхности Земли на плоскую карту. Как указал Мёбиус, эти специальные отношения, известные сейчас как преобразования Мёбиуса, подчиняются простой арифметике комплексных чисел (мы поговорим об этом в гл. 3). Его конструкции сделали геометрию комплексной плоскости наглядной, продемонстрировав ее красоту.[7]

[6]На самом деле неевклидова геометрия была открыта независимо и более или менее одновременно Гауссом, Бойяи и Лобачевским, см. гл. 12.

[7]Комплексная плоскость изображена на рис. 2.1.

Ближе к концу века Феликс Клейн, один из великих математиков своего времени и герой нашего повествования, в своем знаменитом докладе, прочитанном в Эрлангенском университете, представил объединенную концепцию геометрии, включающую и дивный новый мир Бойяи, и «отношения» Мёбиуса в понятие симметрии, расширенное невиданным прежде образом. Дальнейшая работа Клейна показала, что такое видение симметрии позволяет лучше понять многие специальные функции, столь полезные в распутывании физических загадок окружающего нас мира (см., например, гл. 12). Оно привело его к открытию симметричных узоров, в которых растущее число искажений вызывает столь быстрое сжатие, что в конечной области помещается бесконечное число бесконечно сжимающихся и сгущающихся плиток.

Осуществленный Клейном замечательный синтез обнаружил поразительные связи между идеями из совершенно различных и далеких областей математики. Более того, некоторые следствия его работы были поняты лишь почти век спустя. Книги Клейна (написанные в соавторстве с его бывшим учеником Робертом Фрике) содержат множество красивых иллюстраций, тщатель-

но просчитанных и нарисованных от руки. Эти рисунки задали высочайший стандарт, и даже сегодня их нередко используют в качестве иллюстраций к математическим статьям. Однако многие объекты, возникавшие в ходе исследований, были настолько сложны, что Клейн был вынужден написать:

> Вопрос в том… каково будет положение предельных точек. Несложно ответить на него с чисто логической точки зрения. Однако когда мы пытаемся мысленно представить себе результат, воображение, кажется, полностью отказывает.[8]

[8] *F. Klein*. The mathematical character of space-intuition // Lectures on Mathematics, 1894. Reprinted by AMS Chelsea, 2000.

Возможности более широкого применения идей Клейна стали ясны лишь после того, как в 1970-е годы в науке произошли два принципиально новых и глубоко связанных между собой события. Во-первых, появление и растущая доступность мощных компьютеров и компьютерной графики. Во-вторых, проблески понимания того, что хаотические явления, наблюдавшиеся ранее лишь в отдельных ситуациях (например, в теориях движения планет и некоторых электронных цепях), на самом деле вездесущи и, более того, позволяют строить лучшие модели многих физических явлений, чем классические специальные функции. При этом одна из отличительных черт хаотических явлений состоит в том, что структуры, наблюдаемые в целом, бесконечно повторяют себя во все меньшем и меньшем масштабе. Это свойство называется самоподобием. В работе над новой концепцией объединились многие математические школы, однако незаменимым фактором прогресса стал компьютер, дав возможность проводить вычисления в немыслимых ранее масштабах. Для тех, кто был знаком с теорией Клейна, соблазн воспользоваться современной компьютерной графикой, чтобы воочию *увидеть* его «совершенно невообразимые» замощения, был непреодолим.

На обложке нашей книги приведено современное изображение одного из новых симметричных миров Клейна. Его иное обличье — «сияющий предел», изображенный на рис. 1. Вглядываясь в пузырьки, вы видите окружности внутри окружностей, и весь рисунок, демонстрируя присущее хаосу самоподобие, вызывает также смутное чувство симметрии. Однако, не имея правильного математического языка, трудно сформулировать, в чем заключается эта симметрия. Размеры и положения окружностей на обеих картинках не одинаковы: точное Verwandschaft между ними есть результат искажения, производимого преобразованием Мёбиуса.

Как выяснилось, клейновские замощения тесно связаны с современными идеями о самоподобном поведении, пришедшими

из статистической механики, исследования фазовых переходов и изучения турбулентности. В этих областях самоподобие вызвано случайными возмущениями, однако в работе Клейна оно подчиняется точным и простым законам.

Странным образом эта идея *точного* самоподобия вызывает еще одну ассоциацию — на сей раз с древней метафорой сети Индры, которой пронизана «Аватамсака-сутра», или «Сутра Хуаянь» («Цветочная гирлянда сутр»), один из богатейших и наиболее сложных текстов дальневосточного буддизма. Этой ассоциацией мы косвенно обязаны Майклу Берри: упоминание о том, что в «Сутре Хуаянь» рассказывается о жемчужинах Индры, мы обнаружили в одной из его статей о хаосе. Как и на обложке нашей книги, жемчужины в сети Индры отражают друг друга, причем сами отражения содержат не только другие жемчужины, но и отражения других жемчужин. Таким образом, вся вселенная видна не только в каждой жемчужине, но и в каждом отражении каждой жемчужины, и так ad infinitum.

В ходе дальнейших исследований мы обнаружили, что вся математическая конструкция Клейна, включающая одинаковые структуры, бесконечно повторяющиеся друг в друге во все уменьшающемся масштабе, удивительным образом воспроизводит философию и образы «Аватамсака-сутры». Как пишет Ф. Кук в своей книге «Буддизм Хуаянь: драгоценная сеть Индры»:

> В школе Хуаянь очень любили этот образ, неоднократно упоминающийся в текстах школы; он символизирует космос, в котором между всеми его элементами есть бесконечно повторяющиеся связи. Считается, что подобная взаимосвязь выражает одновременно *взаимное тождество* и *взаимную обусловленность*.

По словам сэра Чарльза Элиота,

> Таким же образом каждый объект в мире есть не просто он сам, он включает в себя любой другой объект и по существу *является* любым другим объектом.

Формулируя утверждение, одинаково верное как для математики, так и для религии, можно сказать, что каждая часть любого из наших рисунков содержит в себе суть целого.

Возможно, создавая рисунок «сияющего предела», мы слишком увлеклись этой аналогией. Цвета в нем подобраны таким образом, что точки скопления мельчайших фрагментов мозаики излучают таинственное сияние. Следуя философии «Аватамсака-сутры» и все сильнее увеличивая изображение (вы сможете это

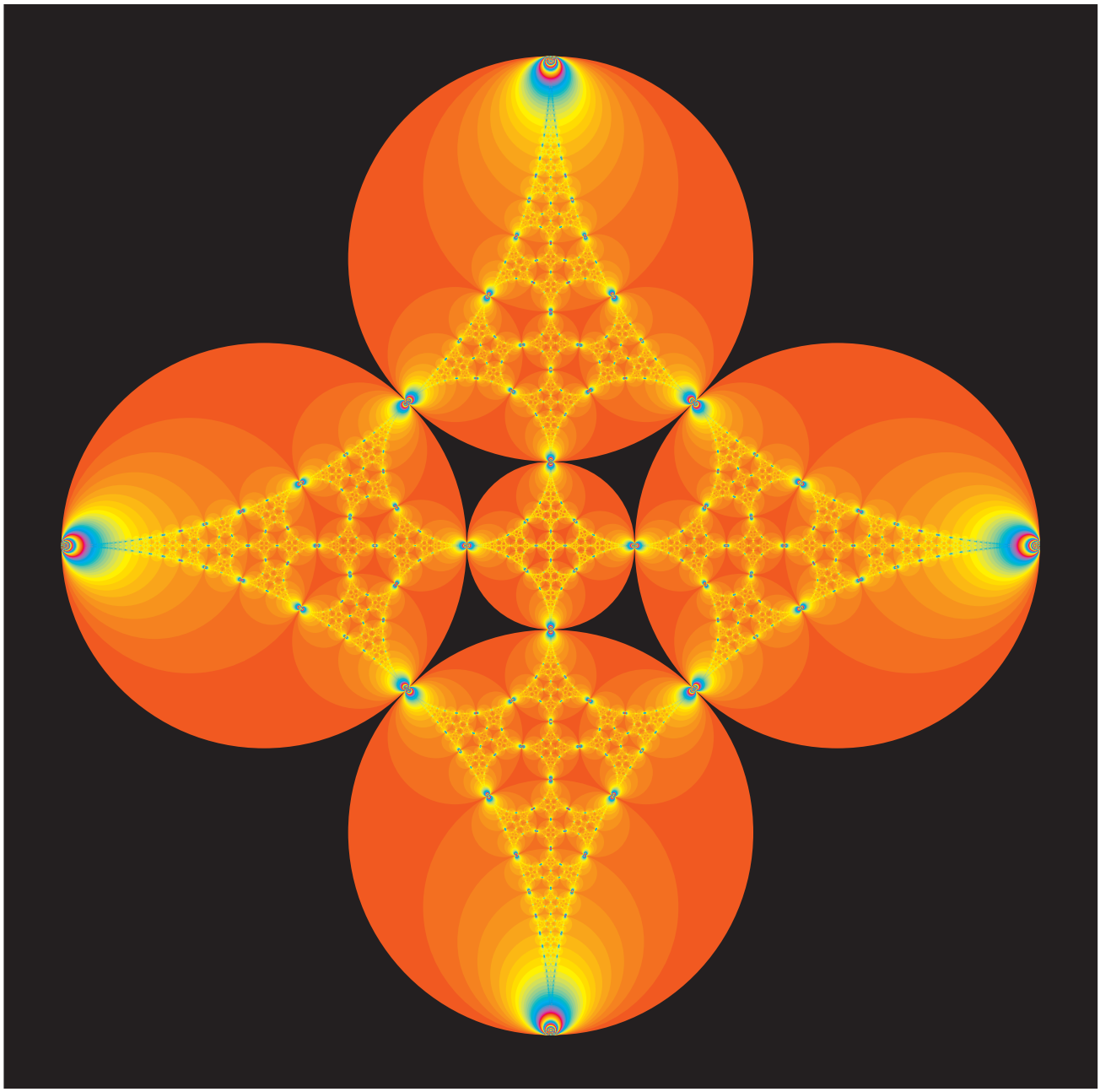


Рис. 1. Сияющий предел. Эта иллюстрация следует мантре жемчужин Индры ad infinitum (настолько, насколько позволяют возможности компьютера). Исходный рисунок содержал лишь пять соприкасающихся красных кругов, и сияющее желтое кружево возникает из него совершенно самопроизвольно.

делать, написав свою собственную программу), вы будете наблюдать все ту же кружевную структуру, повторяющую себя на все более и более тонком уровне, миры внутри миров внутри миров. Сияющий узор — это «фрактал», являющийся «предельным множеством» одной из симметричных итеративных процедур Клейна. Объяснению того, как следует понимать и рисовать такие предельные множества, и посвящена эта книга.

Как и многие другие математики, мы часто испытывали досаду от невозможности передать волнение, азарт и радость творчества, сопутствующие нашей работе. Мы надеемся, что наша книга поможет хоть немного справиться с этой проблемой. На каком бы уровне вы ни решили ее читать — только просмотреть

картинки, прочитать отдельные места, самостоятельно повозиться с формулами или же создать свою собственную компьютерную лабораторию, — мы будем считать свою задачу выполненной, если нам удастся передать хотя бы часть красоты, которую мы видим, и восторга, который мы ощущаем, исследуя эту данную Богом, но созданную человеком вселенную под названием математика.

ГЛАВА I

ЯЗЫК СИММЕТРИИ

Вскипятите его, остудите во льду
И немножко припудрите мелом,
Но одно безусловно имейте в виду:
Не нарушить симметрию в целом!

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
(пер. Г. Кружкова)

Для математика понятие симметрии имеет гораздо более широкий смысл, нежели тот, который мы используем в повседневной жизни. Одним из первых, кто пришел к этому более глубокому пониманию симметрии, был выдающийся и очень влиятельный немецкий математик Феликс Клейн. В 1872 г., в докладе по случаю вступления в должность профессора Эрлангенского университета (в необычайно молодом возрасте всего 23 лет) Клейн предложил математическому сообществу радикально расширить общепринятый взгляд на симметрию и считать симметричными объекты, которые прежде никто не подумал бы так называть. Процитированные выше строки Льюиса Кэрролла (настоящее имя которого — Чарльз Доджсон), математика, преподавателя оксфордского колледжа Крайст-Чёрч, были написаны всего четырьмя годами позже. Не исключено, что Доджсон был наслышан об идеях Клейна и именно о них думал, сочиняя эту нелепицу.

В написанной по материалам этого доклада вошедшей в историю короткой статье[1] молодой Клейн подвел итог более чем пятидесятилетнего развития математики, выдвинув новые идеи, коренным образом изменившие ее дальнейшее развитие. Сегодня трудно оценить в полной мере значимость сказанного Клейном, потому что его лекция привела к смене парадигмы, которая задним числом кажется совершенно очевидной, и трудно даже поверить, что раньше кто-то мог думать иначе.

[1] Опубликованной под высокоученым названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», но известной ныне как «Эрлангенская программа».

Коротко говоря, Клейн предложил рассматривать геометрию как «изучение свойств пространства, инвариантных относительно данной группы преобразований». При изучении геометрии, утверждал Клейн, нужно рассматривать не только объекты (треугольники, окружности, икосаэдры или же фигуры гораздо более

дикого вида — как фракталы на рисунках в этой книге), но и перемещения. При классическом евклидовом взгляде на геометрию, господствовавшем на протяжении более чем двух тысячелетий, под перемещениями всегда понимались только движения твердого тела: можно взять фигуру и поместить ее идентичную копию в новое место. Радикальная идея Клейна состояла в том, что и другие перемещения, которые могут существенно растягивать или скручивать объекты, также следует считать геометрическими. При таком подходе геометрия охватывает гораздо более широкий класс задач, чем в классическом понимании. Геометры должны изучать те свойства объектов, которые сохраняются при перемещениях, — как нам изящно советует Кэрролл в своем четверостишии.

Круг идей, занимавших Клейна, связан с двумя понятиями: это идея подобных или симметричных объектов и идея «преобразования» или «перемещения». Клейн соединил их вместе, используя понятие **группы**, разработанное пятьюдесятью годами ранее другим исключительно молодым математиком Эваристом Галуа. За время своей короткой карьеры, в период с 1829 по 1831 г., Галуа осознал, что корни многочлена можно изучать при помощи их «симметрий»; так, например, $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ можно рассматривать как симметричные решения уравнения $x^2 - 2 = 0$. Идеи Галуа были совершенно недоступны пониманию современников, и его работа едва не оказалась потерянной навсегда.[2] Клейн понял, что не стоит пытаться каталогизировать все возможные типы симметрий и выставлять их напоказ, как это делали средневековые мусульманские строители Альгамбры. Понятие группы дает очень простой и в то же время необычайно мощный математический инструмент для описания симметрий всех возможных типов.

[2]История Галуа — одна из самых романтических в истории математики; подробнее об этом см. с. 20.

Идея группы состоит в том, чтобы описывать правила, отвечающие за *повторяемость*, присущую симметрии. Например, если какой-то шаг можно сделать один раз, то его же можно сделать еще раз, и еще, и еще. Это может вернуть вас обратно в то же самое положение, с которого вы начинали (как в случае зеркала, когда два отражения возвращают в исходное состояние), а может привести к возникновению расширяющейся мозаики из объектов, покрывающих регулярным узором все бóльшую и бóльшую площадь, наподобие плиток, устилающих огромный пол.

Коротко говоря, обычно симметрия понимается в терминах рисунков и пропорций как трудноопределимое свойство некой сбалансированности и правильности.[3] Со времен Клейна в распоряжении математиков имеется более точное определение: симметрия — это баланс, создаваемый повторением многих дви-

[3]В словаре Чемберса находим: «Точное соответствие частей по обе стороны от прямой или плоскости, либо же относительно центра или оси; баланс или верная пропорция; красота формы; расположение частей».

Феликс Христиан Клейн (1849–1925)

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе, принадлежащем в то время Прусской империи, в 1849 г. Он изучал математику и физику в Боннском университете. Работу над диссертацией Клейн начал, намереваясь стать физиком, однако под влиянием своего научного руководителя Плюккера он увлекся геометрией. Плюккер умер в 1868 г., в том же году, когда Клейн получил докторскую степень; естественно, что именно Клейну выпало завершать работу своего руководителя. Этим он обратил на себя внимание Клебша, одного из ведущих профессоров Гёттингенского университета. Вскоре Клебш убедился, что Клейн имеет все шансы стать ведущим математиком своего времени.

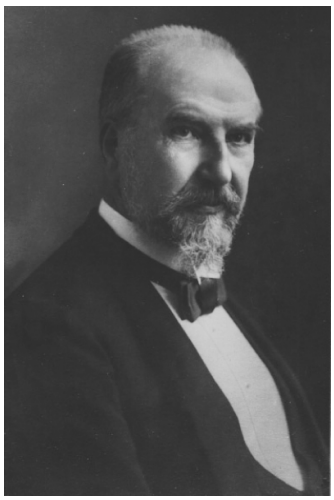
В 1872 г. Клейн получил приглашение на должность профессора Эрлангенского университета в Баварии, и последующие 10 лет были для него периодом расцвета творческой активности. В 1875 г. он перешел в Высшую техническую школу в Мюнхене, где нашел много талантливых студентов, и его педагогический талант раскрылся в полной мере. В том же году он женился на Анне Гегель, внучке знаменитого философа. В 1880 г. Клейн перебрался в Лейпциг, где в то время кипела математическая жизнь. Здесь он создал ту глубокую теорию, которой посвящена эта книга. Но здесь же из-за сильного напряжения, вызванного острым соперничеством с блестящим молодым французским математиком Пуанкаре, резко ухудшилось его и без того слабое здоровье. В 1883–1884 гг. Клейн страдал от постоянных депрессий, и впоследствии он так и не смог полностью восстановить свой математический потенциал. Та его работа, которая относится к предмету нашей книги, была существенно развита в двух трактатах, написанных совместно с Робертом Фрике в период с 1890 по 1912 г.

В 1886 г. Клейн занял кафедру в Гёттингене, где и работал до выхода в отставку. Он был не только выдающимся математиком, но обладал и значительными организационными и административными способностями. Именно благодаря его таланту и энергии была создана знаменитая гёттингенская математическая школа, которая была ведущим мировым математическим центром, пока в 1930-е гг. ее не разрушил Гитлер. Распространению идей и влияния Клейна во всем мире во многом способствовали учившиеся у него иностранцы. Среди его учеников — американцы Фрэнк Коул и Уильям Осгуд, итальянцы Луиджи Бьянки и Грегорио Риччи-Курбастро, а также одни из первых женщин-математиков Мэри Ньюсон и Грейс Чизхолм Янг. На рубеже столетий Клейн активно заинтересовался вопросами преподавания математики и содействовал введению в школьную программу основ математического анализа. Он вышел в отставку по состоянию здоровья в 1913 г. и скончался в Гёттингене в возрасте 76 лет.

жений одного и того же вида, а именно всех движений из некоторой группы. Эти две идеи — введение в геометрию групповых соображений и расширение класса изучаемых движений — и легли в основу собственных исследований Клейна. Именно эти сюжеты он объединил в своей знаменитой программе.

Значительная часть последующей работы Клейна была связана с выявлением и изучением одного конкретного нового типа

Роберт Фрике (1861–1930)



Роберт Фрике родился в Хельмштедте, Германия. Некоторое время он учился и преподавал в Гёттингене, а в 1885 г. закончил Лейпцигский университет, написав диссертацию под руководством Клейна. Его сотрудничество с Клейном началось с публикации двух томов их первого совместного труда «Лекции по теории эллиптических модулярных функций», вышедших в 1890 и 1892 г. В этот период Фрике преподавал в двух гимназиях Брауншвейга, а также, что более любопытно, был наставником двух сыновей прусского принца-регента Альбрехта. Он защитил диссертацию, дающую право на занятие профессорской должности («Habilitation»), в Киле и с 1892 г. работал приват-доцентом в Гёттингене. В 1894 г. Фрике занял место ушедшего в отставку Дедекинда в университете Кароло-Вильгельмина в Брауншвейге, а его давние дружеские отношения с Клейном упрочились, когда в том же году он женился на племяннице Клейна Элеоноре Флендер.

Фрике пользовался большим авторитетом и как математик, и как человек. В тесном сотрудничестве с Клейном они создали бóльшую часть теории, известной ныне как теория клейновых групп, которой и посвящена наша книга. Фрике играл важнейшую роль в управлении университетом, являясь его ректором в период с 1904 по 1906 г., а также с 1921 по 1923 г. Он принимал участие в работе над государственной образовательной программой (здесь очень пригодился его опыт работы школьным учителем) и занимал несколько официальных постов. Этим обилием обязанностей объясняется длинный промежуток между выходом первого и второго тома (в 1897 и 1912 г. соответственно) второго совместного с Клейном труда «Лекции по теории автоморфных функций», фактическим автором которого был именно Фрике, хотя Клейн также внес свой немалый вклад. В последнем томе Фрике использовал новейшие достижения математики, такие как канторовская теория множеств и теория размерности Брауэра, для решения ряда ранее не поддававшихся задач. Он работал в Брауншвейге до самого конца жизни.

Фотография любезно предоставлена архивом Брауншвейгского технического университета. Также выражаем благодарность Гансу Ополке.

симметрии, о котором и пойдет речь в этой книге. Однако прежде чем исследовать эти новые миры, давайте потратим немного времени и взглянем на хорошо знакомые евклидовы симметрии с новой клейновской точки зрения.

Таксономия симметрии

На рис. 1.1 приведена часть спутникового снимка сельскохозяйственного штата Айова, а рядом с ней — идеализированное изображение той же местности с доведенной до совершенства симметрией. Простирающийся насколько хватает глаз ландшафт выглядит как правильный узор, составленный из отдель-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

μ-параметр, 273, 301
KBMAG, 375, 376

Аватамсака-сутра, xxii
автомат, 373
автоморфная функция, 392
Айова, 4, 24
аксиома, 395
  параллельности, 396
алгебраический предел, 358
алгоритм
  Евклида, 225, 234, 321
  специальный словарный, 265, 275, 290
Альфорс (Ahlfors L.), 405
Аполлоний Пергский, 206, 213
арктангенс, 46
асимптотическое самоподобие, 332
ассоциативность, 22

бабушка, 92, 240–242, 279, 311
Бельтрами (Beltrami E.), 398
Берс (Bers L.), 296, 306, 326, 328
бесконечно удаленная точка, 60, 62
Бойяи (Bolyai J.), xix, 395, 396
Боуэн (Bowen R.), 269

Вейерштрасс (Weierstraß K.), 344
вещественная ось, 44
вещественные числа, 42
вписанная окружность, 210, 213
выпуклая граничная оболочка, 408, 409

Галуа (Galois É.), 2, 20
Гаусс (Gauss C. F.), 223, 395, 396
гауссовы целые числа, 64
геодезическая, 409
геометрический предел, 358
гиперболическая геометрия, 329, 349, 391
гиперболическая плоскость, 398
гиперболические функции, 51
гиперболическое пространство, 176, 404
гипотеза
  геометризации, 408
  Маркова, 203, 298
граница Маскита, 304
группа, 2, 17–21, 23, 55
  2/5-касп-, 288
  автоматная, 372
  бабушкина с двумя образующими, 279
  верхней полуплоскости, 93
  вырожденная, 326
  дважды вырожденная, 326, 354
  дискретная, 252
  единичного круга, 96
  Йоргенсена
    вырожденная, 329
    дважды вырожденная, 346
  касп-, 258, 280
  квазифуксова, 173
  клейнова, 369, 376
  Маскита, 273, 306–311
  модулярная, 218, 219, 221, 234, 235
    полная, 221, 223
  недискретная, 245
  образующие, 21
  проколотого тора, 201, 241
  Райли, 271
  с двойным каспом, 217, 258, 283, 291, 306–315
  с максимальным числом каспов, 217
  с одним каспом, 258, 291
  с параболическим коммутатором, 241
  свободная, 108, 142
  фуксова, 173, 192
    Шоттки, 189
  Шоттки, 107–112
    θ-, 127
    классическая, 112

группа Шоттки
конструкции, 126–128
общая, 112
фуксова, 128
целующаяся, 170

движение, 5
двоичная запись, 138
Дель Ферро (del Ferro S.), 41
дерево, 112, 191–194
словарное, 114–116
десятичные дроби, 135–138, 164
периодические, 135, 164
диаграмма Аргана, 44
динамика Шоттки, 111
диофантово уравнение, 203
диск Пуанкаре, 399
доктор Стрелкин, 9, 10, 25, 44, 45, 55, 73, 91, 119, 152, 154, 175–177, 215, 216, 248
его шея, 196
дополнение
к зацеплению Уайтхеда, 360
к узлу, 407
дроби Фарея, 234, 322

единичная матрица, 79
единичная окружность, 47
единичный диск, 95

Жордан (Jordan C.), 20

замощение, 21, 27, 32, 67, 89–92, 116–120, 173–177, 300
заполнение разрывов, 228–231
зеркальная симметрия, 7
золотое сечение, 331

идеальный треугольник, 209, 213, 231
инвариантность, 15, 108
инверсия, 58–60
иррациональное число, 36, 55, 58, 225, 325, 329, 348
итерация, 6, 54

Йоргенсен (Jørgensen T.), 270, 329, 407

Кантор (Cantor G.), 4, 139, 165, 326, 343
канторово множество, 146
Кардано (Cardano G.), 41
касп, 288
квадратичная форма, 223
квадратное уравнение, 40
квазиокружность, 173
Клейн (Klein F.), ix, xx, 1, 3, 4, 20, 41, 69, 77, 109, 114, 173, 202, 391, 392, 395, 400
коммутативность, 52
коммутатор, 179, 180, 196, 205
коммутирующие преобразования, 16
комплексная плоскость, 44
комплексное сопряжение, 48
комплексные квадратные корни, 65
комплексные числа, 39–67
аргумент, 46
вещественная часть, 42
мнимая часть, 42
модуль, 46
сопряжение, 48
тригонометрическая форма, 46
композиция, 14–17, 23, 34, 66
конкатенация, 293
конформное отображение, 401
корень уравнения, 50
Кра (Kra I.), 383, 389
кривая Пеано, 344
кубическое уравнение, 40, 42, 50, 319
Кэли (Cayley A.), 20, 114
Кэннон (Cannon J.), 346

лексикографический порядок, 125
Ли (Lie S.), 20
Лобачевский Н. И., 395, 396
локсодрома, 71
лучи вещественных следов, 310

Макмуллен (McMullen C.), xii, xiv, 149, 150, 166, 210, 269, 306, 332, 337, 340, 349, 363
Мандельброт (Mandelbrot B.), 131, 149, 162, 266, 344
Марков А. А., 163
массив Шоттки, 111
матричная алгебра, 79
метод
Ньютона, 286, 317
секущих, 317
сопряжения, 72
Мински (Minsky Y.), 306, 340
мнимая ось, 44
множество
Жюлиа, 306
Мандельброта, 229, 305
несчетное, 139
предельное, 109, 131, 144
разрывности, 118
регулярное, 118, 173
счетное, 139, 165
модули, 401
модулярная функция, 392
мультипликатор, 86
Мёбиус (Möbuis A.), xx, 77

начальные диски Шоттки, 110
неевклидова геометрия, 391, 395
независимость от начальной точки, 143, 165
неподвижная точка, 54, 85
нейтральная, 88
отталкивающая, 54
притягивающая, 54
уравнение, 85, 165
нормализация, 240

образ, 10
обратная матрица, 79
обратный элемент, 23
окружности Содди, 213, 233
окружности Форда, *см.* окружности Содди
определитель, 78, 80
орбита, 19, 21, 54
основная теорема алгебры, 50, 304
отображение, 10, *см. также* преобразование
квазиконформное, 403
экстремальное, 403
конформное, 403
линейное, 35
Маркова, 354
отражение, 7
отслеживание границы, 315–322

параллельный перенос, *см.* сдвиг
Пеано (Peano G.), 344
период, 135
поверхность рода два, 200
поворот, 7, 35
подгруппа, 92, 189, 218
поиск
в глубину, 122, 132, 151–160
в ширину, 122–126
полином для следа, 298
полярные координаты, 46, 49
последовательность Фарея, 165, 316, 321
предельная точка, 131, 132

преобразование, 10, *см. также* отображение
  аффинное, 55, 66
  гиперболическое, 85, 88
  Кэли, 95
  локсодромическое, 85, 88
  Мёбиуса, 69–104
  нелинейное, 72
  обратное, 11
  параболическое, 85, 88
  почти параболическое, 256, 263, 265
  растягивающее, 96
  сопрягающее, 27
  сохраняющее углы, 84
  тождественное, 22, 100
  эллиптическое, 85, 88
префикс, 136
проблема тождества слов, 372, 376
проблема шеи, 261–266
программирование, 28–34
  метод Ньютона, 316
  операций над комплексными числами, 49–51
  преобразования Мёбиуса, 81
прокол, 200
проколотый тор, 200
простая петля, 296
процедура завершения, 122
псевдокод, 31
Пуанкаре (Poincaré H.), 109, 392, 394, 395, 404

радиан, 46
Райли (Riley R.), 271, 407
растеризация, 292
расширенная вещественная прямая, 92
ренормализация, 337
рецепт
  бабушкин, 240
  Йоргенсена, 270
  Маскита, 273
  общий для группы с двумя образующими, 274
  Райли, 271
Риман (Riemann B.), 401
риманова поверхность, 401
Ричардсон (Richardson L. F.), 266
род, 401

сдвиг, 7, 74, 81
сердцевина, 286
сеть Индры, xxii
симметрия, 4–9
система Линденмайера, 344
скатерть Аполлония, 209–215, 217, 244, 272, 279, 289, 355, 357, 384
скользящая симметрия, 14
след, 89
слово, 107
  p/q-, 291, 340
  бесконечное, 133–135, 138–140
  приведенное, 113, 133
  пустое, 121
сложение по Фарею, 224, 292, 331
случайный поиск, 122, 162–163
сопряжение
  группы, 185, 186, 207, 280
  отображения, 27, 55
соседние дроби, 222, 293
сохранение углов и окружностей, 64
спаривание, 106
специальное слово, 266
спираль, 53, 66, 70–74, 238
срез Маскита, 302, 304
стереографическая проекция, 62, 64
странный аттрактор, 150
сфера Римана, 61
  с тремя проколами, 218, 228, 302
  с четырьмя проколами, 389

Тарталья (Tartaglia N.), 41
Тейхмюллер (Teichmüller O.), 402
теорема
  Жордана, 239
  о гиперболизации, 407
  униформизации, 400
теория Тейхмюллера, 273, 391
тождество
  для следов, 203, 299
  Маркова, 202
  Фрике, 202
топология, 24
тор, 24–25, 89–92, 295–298
  проколотый, 296
  с двумя проколами, 387
точка Йоргенсена, 334
трехмерная сфера, 407
трехмерное многообразие, 404, 406
троичная запись, 138
Тёрстон (Thurston W.), xii, 238, 346, 407, 408

узел «восьмерка», 407
упаковка Аполлония, 210
уравнение степени n, 50

Фарей (Farey J.), 224
Феррари (Ferrari L.), 41
формула
  Кардано, 42
  Содди, 233
фрактал, 149–150
фрактальная пыль, 131
фрактальная размерность, *см.* хаусдорфова размерность
Фрике (Fricke R.), xx, 3, 4
Фукс (Fuchs I. L.), 192, 394
фундаментальная область, 37

хаос, xxi, 143, 150
хаусдорфова размерность, 146, 148, 150, 165, 266–269, 329
Хокусай, 388
Холт (Holt D.), 398

целующиеся окружности, 169
цепная дробь, 224, 225, 309, 322, 331, 363
цепь Маркова, 163
циклическая перестановка, 153
циклический порядок, 153

числа
  Маркова, 298
  Фибоначчи, 331
  чисто мнимые, 42
чистая гомотетия, 81

швейцарский сыр, 119
Шоттки (Schottki F.), 109

экспонента, 56–58
экспоненциальное условие, 112
эллиптическая функция, 392
Эрлангенская программа, xx, 1, 77
эффект бабочки, 143