ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

О науке ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

> — Вы никогда не слыхали о том, что краткость — сестра таланта? — спросили раз графомана.
>
> — Мой талант не имеет родственников!

Принято считать, что алгебраические науки изучают множества с заданными на них операциями — такими, как, скажем, сложение, умножение, переход к обратному или к симметричному элементу. Топологические науки изучают множества, в которых задан непрерывный переход от одних элементов к другим и, в частности, определены сходящиеся последовательности. С той же неизбежной долей упрощения можно сказать, что функциональный анализ изучает множества с синтетической (= составной) структурой — как алгебраической, так и топологической, причем обе структуры согласованы друг с другом с помощью некоторых естественных требований.

В первозданном виде классического линейного функционального анализа 20-х годов алгебраическая структура — это структура линейного пространства, а сходимость векторов задана и одновременно согласована с обеими линейными операциями посредством вводимой нормы. Правда, сразу же было обнаружено, что бóльшая часть по-настоящему глубоких результатов или «принципов», составляющих лицо теории, требуют дополнительного предположения о полноте (банаховости) рассматриваемого нормированного пространства. А дальше всего продвинуться в изучении объектов классического функционального анализа удается тогда, когда мы сосредотачиваемся на изучении гильбертовых пространств. Это те банаховы пространства, в которых норма задана с помощью скалярного произведения и поэтому можно говорить об ортогональных (перпендикулярных) векторах. Здесь в ряде принципиальных направлений исследования достигнут совершенный триумф: удалось полностью познать природу как самих гильбертовых пространств (теорема Фишера—Рисса), так и наиболее важных классов отображений между этими пространствами (спектральная теорема Гильберта, теорема Шмидта). Классический функциональный анализ в нормированных, банаховых и гильбертовых пространствах составляет бóльшую часть нашего учебника.

Время шло, и новые задачи потребовали обогащения, в том или ином направлении, исходных структур. Пожалуй, раньше всего было осознано, что для изучения целого ряда важных функциональных пространств одной нормы маловато. «Правильную» сходимость, естественную для этих пространств, надо задавать с помощью целого семейства норм, а еще лучше — более общих преднорм (= полунорм). Так возникли полинормированные пространства[1], столь необходимые для теории обобщенных функций, комплексного анализа и дифференциальной геометрии. Они принесли большую пользу и классическому функциональному анализу, снабдив его новыми типами сходимостей.

Но было сделано и другое наблюдение. Можно построить глубокую и красивую теорию, если обогатить не топологическую, а алгебраическую природу рассматриваемых пространств, добавив к уже существующим там двум линейным операциям еще и третью — умножение векторов друг на друга. Так появилась теория банаховых алгебр. Среди ее наиболее значительных достижений — две фундаментальных «теоремы реализации». Первая (теорема Гельфанда) гласит, что коммутативная банахова алгебра является, с точностью до некоторого явно измеренного огрубления, алгеброй непрерывных функций с поточечными операциями. Вторая (теорема Гельфанда—Наймарка), впоследствии вошедшая в плоть и кровь современной квантовой физики, утверждает, что банахова алгебра, обладающая некоторой естественной симметрией, называемой инволюцией и должным образом согласованной с нормой, является не чем иным, как самосопряженной алгеброй операторов в гильбертовом пространстве[2].

Наконец, последние 20 лет ушедшего века были свидетелями появления и бурного развития нового направления в нашей науке — квантового функционального анализа, называемого также теорией операторных пространств. В этой области анализа линейное пространство наделяется не нормой, а более сложной структурой — квантовой нормой. А именно, каждое пространство матриц (любого размера) с коэффициентами из заданного пространства снабжается своей нормой,

---

[1] Полинормированным пространствам и некоторым их приложениям в нашей книге будет уделена специальная глава.

[2] В нашем учебнике мы по необходимости рассказываем лишь о той изначальной части теории банаховых алгебр, без которой нельзя говорить о спектрах. Обе упомянутых теоремы приведены без доказательства, но знание их формулировок мы считаем обязательным для всех студентов.

и все такие нормы некоторым разумным образом согласованы друг с другом. Было осознано, что многие трудные вопросы анализа становятся ясными и прозрачными, если перейти от заданных нормированных пространств к их надлежащим «квантованиям», и на этом пути удалось решить важные проблемы, много лет не поддававшиеся решению классическими методами (см. [92]). В то же время квантовый анализ, проясняя ряд вопросов классического, имеет и свои собственные украшения в виде глубоких и ярких теорем, не имеющих классических аналогов [1)].

Мы упомянули только о некоторых составляющих частях функционального анализа. Более полный рассказ должен был бы коснуться и других его ветвей. Так, всю свою историю функциональный анализ развивался в тесной связи с гармоническим анализом, этой, говоря упрощенно, «наукой о сдвигах в функциональных пространствах», которую можно считать его органической частью [2)]. Выделились и обрели свое лицо такие области, как теория упорядоченных пространств и теория топологических алгебр.

Особо отметим, что и классический функциональный анализ — геометрия банаховых пространств — отнюдь не стоит на месте. Уж сколько раз «банаховой геометрии» прочили скорый уход на пенсию, а она все продолжает удивлять новыми глубокими и часто неожиданным результатами [3)].

* * *

Конечно, мы бы хотели, чтобы из нашего учебника читатель вынес впечатление о том, что функциональный анализ — красивая и богатая содержанием наука. Однако для полноценного развития и долгой жизни математической дисциплины одного внутреннего богатства, пожалуй, мало. Любая математическая наука, лишенная связей с остальной математикой и естествознанием, подвергается серьезной опасности, становясь, как писал фон Нойманн, «все более и более эстетизирующей, все более и более искусством ради искусства» (см. [86]). Вот мы

---

1) В наших лекциях мы не рискнули сколько-нибудь углубляться в квантовый функциональный анализ. Мы только сочли необходимым удовлетворить возможное любопытство читателя, дав (мелким шрифтом) два его основных определения — квантового пространства и вполне ограниченного оператора. Этим определениям, их подготовке и обсуждению посвящен один из параграфов. Соответствующий текст играет роль рекламного ролика и не является обязательным даже для отличников.

2) В нашей книге элементы гармонического анализа представлены главой о преобразовании Фурье.

3) Некоторые последние достижения, такие, как теорема Гауэрса, упомянуты и в наших лекциях.

и наблюдаем, как в одних науках все более мелкие вопросы рассматриваются под все большим увеличением, а в других (или тех же самых) множатся хилые «общие теории» с явно недостаточным числом содержательных примеров.

Успокоим нашего читателя: функциональному анализу, по крайней мере сегодня, подобные опасности не грозят. Связей с окружающими науками у него предостаточно, и они находятся в процессе постоянного обновления. (Разумеется, мы говорим о нашей науке в целом — а так, конечно, в семье не без урода, да и кто из нас без греха...) Ведь как сейчас принято отвечать на вопрос о том, что такое математика — наука о моделях! Но физика просто кишит моделями из функционального анализа — от самых древних, родившихся в недрах вариационного исчисления, до ультрасовременных, основанных на недавних достижениях теории операторных алгебр (см., например, [84]). (Самая знаменитая модель принадлежит фон Нойманну, «покусившемуся» на квантовую механику в целом.) Внутри самой математической науки функциональный анализ позволяет рассмотреть с единой точки зрения такие с виду несхожие вещи, как, скажем, интегральные уравнения, системы линейных уравнений и некоторые вариационные проблемы. Это опять-таки означает, что он доставляет единую модель определенного круга явлений и, стало быть, предлагает единый метод их исследования.

Поучительный пример взаимопереплетения, к обоюдной выгоде, функционального анализа с окружающими науками дает книга филдсовского лауреата В. Джонса «Подфакторы и узлы» (см. [79]). Попробуйте отделить там друг от друга функциональный анализ (более подробно, операторные алгебры), теорию групп, маломерную геометрию (узлы и зацепления) и, наконец, квантовую статистическую механику[1].

О некоторых принципах подбора материала

Итак, перед вами — новый учебник по функциональному анализу, именно учебник — книга, предназначенная для первоначального ознакомления с предметом. Разумеется, обязанность автора — сказать несколько слов об особенностях этого учебника как по выбору матери-

[1] К сожалению, недостаток места и времени не позволил нам уделить внешним связям и приложениям функционального анализа сколько-нибудь значительное внимание. Только изредка, когда искушение рассказать о «физическом значении» (или «физическом подтексте») данного утверждения слишком велико, мы позволяем себе замечания неформального и полубеллетристического характера. Это касается, например, теоремы Фишера–Рисса или теоремы о непустоте спектра.

ала, так и по стилю изложения. Ведь если он не отличается от других, то зачем он?

В этом учебнике получили полные права гражданства некоторые понятия, методы и результаты современного функционального анализа, в других учебных пособиях либо отсутствующие, либо содержащиеся где-то на обочине, без особой связи с остальным текстом. Перечислять сейчас эти вещи не имеет смысла: специалист их увидит из подробного оглавления. Мы лишь выделим несколько принципиальных моментов.

Главное, пожалуй, в том, что наша книга написана с категорных позиций, и категорный характер ряда принципиальных конструкций и результатов неизменно комментируется и подчеркивается — а этим, как мы считаем, достигается новый уровень понимания обсуждаемых вещей. Сказанное относится, например, к конструкциям сопряженного оператора и пополнения, теоремам Фишера—Рисса и Шмидта, а ближе к концу книги и к самой спектральной теореме Гильберта. Мы убеждены в том, что студенты третьего курса (и даже их преподаватели!) уже достаточно подготовлены к восприятию самых изначальных — а больше мы и не даем — категорных понятий, а главное — унифицирующего общематематического языка теории категорий. И именно курс функционального анализа с его синтетическим алгебро-топологическим содержанием как нельзя более подходит для первого рассказа о категориях — точно так же, как полвека назад «Анализ III» идеально подходил для изложения основ теории множеств. (Другое дело, что рассказ должен сопровождаться обилием примеров и упражнений, но об этих вещах мы еще поговорим.)

К достоинствам «категорного взгляда на вещи» мы еще будем много раз возвращаться в основном тексте книги. А сейчас хочется оживить это предисловие и вместо общих заявлений рассказать об одном знаменательном разговоре, имевшем место лет 15 тому назад. С моей ученицей познакомился приятный молодой человек, тоже аспирант, занимавшийся алгебраической геометрией. «Какая у вас область математики?» — спросил он. «Банаховы алгебры, а точнее — их группы когомологий». — «Интересно... А какие же там категории?» Правильный вопрос и правильный подход! И то, что с молоком матери впитывают алгебраические геометры, пора бы перенять и функциональным аналитикам. «Какое, милые, у нас тысячелетье на дворе?»[1].

Из конкретных элементов аппарата современного анализа, перекочевавших из специальных монографий в этот учебник, мы здесь вы-

[1] Пишется 20.02.2001.

делим только тензорные произведения банаховых пространств. В книге подробно разобраны два их типа: «проективное» и «гильбертово». А как же иначе? Ведь без них сейчас нельзя работать ни в геометрии банаховых пространств, ни в теории операторов, ни в квантовом функциональном анализе, ни в квантовой статистической механике, ни в теории элементарных частиц... Невольно вспоминаются «Дни Турбиных», где штабс-капитан Мышлаевский изумленно спрашивает у Лариосика: «А как же ты будешь селедку есть, если водку не пьешь?»

О некоторых принципах изложения

1. О том, что считается известным. Как уже упоминалось, эти лекции рассчитаны на студента третьего курса. Предполагается, что за первые два года он освоил то, чему обычно учат в российских университетах (мы судим по МГУ). В частности — и это очень важно — наш читатель уже должен знать линейную алгебру и основы действительного анализа (= меру и интеграл Лебега), а также те элементы теории метрических пространств, которые обычно сообщаются в курсе математического анализа.

Что касается комплексного анализа, то на нашей памяти соответствующие лекции начинались то на третьем курсе, то на втором, то опять на третьем. (Творческая административная мысль наших начальников никак не успокоится.) Но, к счастью для нас, настоящая потребность в этой науке появляется только в середине нашего курса, при изучении спектров (первой понадобится теорема Лиувилля). К этому времени при любом раскладе необходимые лекции уже будут прочитаны.

Несколько сложнее дело обстоит с топологией, а также с некоторыми вещами из алгебры, как, скажем, тензорное произведение линейных пространств. Формально эти вещи вроде входят в программу обучения на втором году. Но, как показывает наш опыт, на те обязательные курсы, к которым эти вопросы пристегиваются, полагаться опасно: лекторы, естественно, имеют в виду другие цели, нежели обслуживание функционального анализа. Поэтому, поступая по принципу «береженого Бог бережет», мы даем независимое и замкнутое изложение нужных топологических и некоторых алгебраических сведений.

2. О крупном и мелком шрифте. Текст, напечатанный обычным шрифтом, соответствует, как мы предполагаем, лекциям по функциональному анализу для студентов третьего — не моложе! — года обучения математических факультетов университетов. Речь идет о полном годовом курсе лекций, сопровождаемом упражнениями (и то, и другое раз в неделю). Этот текст рассчитан на всех студентов, независимо от того, чем они займутся в будущем.

Однако для особо сильных студентов, выбравших себе чистую математику — алгебру, геометрию, анализ — в качестве профессии, этого текста, по нашему убеждению, мало. Такого студента, условно названного в наших лекциях «просвещенным читателем» или «отличником», мы призываем освоить еще и текст, набранный петитом; что поделаешь, «благородство обязывает». (Скажем, знать, как расшифровываются простейшие точные последовательности банаховых пространств, всем не обязательно, но профессиональному математику — надо.)

Впрочем, стремясь удовлетворить возможное любопытство читателя (блажен, кто верует), мы посвятили небольшую часть текста материалу, не обязательному даже для отличников, который дается вам, так сказать, «на вырост». Это относится, скажем, к параграфу о квантовом функциональном анализе, к виду (ко)произведений в некоторых стандартных категориях и т. п. Но, включая подобные кусочки факультативного материала, мы всегда предупреждаем читателя об этой самой факультативности: а это, мол, только для любопытных. (Не вводить же, кроме мелкого шрифта, еще и «мельчайший»?) Излишне говорить, что «крупный» текст никак не зависит от «мелкого».

3. О примерах. Примерам, возможно, уделено большее внимание, чем это обычно принято. Вводя новое понятие, мы тут же собираем для читателя «мешок» примеров, скажем, мешок функторов, мешок полинормированных пространств или самый большой и важный из мешков — мешок операторов. Эти мешки вы должны держать наготове: как только сообщается какая-либо новая конструкция, возможное свойство или инвариант, мы немедленно достаем из мешка наши примеры и смотрим, чем это для них оборачивается. (О том, как это практически делается, читатель может увидеть на примере спектров операторов из гл. 5.) Мы убеждены, что только путем «проигрывания на примерах» можно достичь неформального понимания происходящего. «Теория, друг мой, сера, — поучает гётевский Мефистофель, — но зелено вечное дерево жизни». Так что на примеры, это зеленое дерево жизни математики, мы не жалели ни места, ни времени.

4. Об упражнениях. Эта книга вас мало чему научит, если вы не будете делать содержащиеся в ней упражнения.

Наш читатель, конечно, не прост, ох как не прост. Он любит откладывать упражнения на завтра, а потом повторять эту процедуру (по себе знаем). Чтобы не дать вам расслабиться, мы включили упражнения непосредственно в текст. Встретив упражнение, остановитесь и сделайте его (большей частью это означает: докажите сформулированное там утверждение) и только потом двигайтесь дальше. Как правило, наши упражнения, с учетом часто встречающихся указаний, довольно элементарны. Они иллюстрируют «основной» текст, делая его понимание менее формальным, а часто под их видом сообщается полезный дополнительный материал, непосредственно примыкающий к доказанному утверждению. Правда, есть и небольшое число более трудных упражнений, отмеченных звездочкой *; тут уж поступайте по совести. Напротив, совсем простые упражнения отмечены кружочком $^\circ$; уж если вы их не будете делать, то вскоре за деревьями леса не увидите. Впрочем, упражнения никогда не используются при доказательстве теорем, рассмотрении примеров и т. п. (только, пожалуйста, не делайте отсюда практических выводов). Другое дело, что у упражнений своя иерархия, и результаты одних могут использоваться при рассмотрении других.

5. О теоремах, сообщаемых без доказательства. Таковых в наших лекциях больше, чем это обычно бывает. Как правило, это результаты принципиальной важности, «с именем», имеющие простую и эффектную формулировку. Однако их доказательства достаточно сложны и/или опираются на факты, выходящие за пределы предполагаемых у читателя знаний. Поэтому знать о существовании подобного результата весьма желательно — по нашему мнению, просто необходимо — уже при первом знакомстве с предметом, но тратить время и силы на разбор его доказательства пока не стоит. Типичные примеры — это теорема Энфло—Рида, теорема Милютина и (above all) теорема Гельфанда—Наймарка. Такие теоремы отмечены знаком бд (без доказательства).

6. О технических деталях изложения. Книга делится на главы, а те — на параграфы; ссылка типа «см. § 0.6» относится к § 6 гл. 0.

В тексте выделены и независимо пронумерованы в пределах каждого параграфа следующие «математические высказывания»: определения, теоремы, предложения, следствия, примеры и упражнения (есть еще «замечания» и «предупреждения», но у них номеров нет). Ссылаясь, скажем, на предложение 1.2.3 (соответственно предложение 2.3, предложение 3), мы имеем в виду предложение 3 § 2 гл. 1 (соответственно предложение 3 § 2 той же главы, предложение 3 того же параграфа).

Теоремы и предложения даются с полными доказательствами, за исключением помеченных сокращением бд (см. п. 5). Разница между теоремами и предложениями чисто субъективная: первые кажутся более весомыми. Наши леммы — это всегда утверждения, вспомогательные по отношению к той или иной конкретной теореме; они и помещены внутри доказательства соответствующих теорем. Доказательства предложений и лемм окаймлены знаками $\triangleleft$ и $\triangleright$. Это же относится и к теоремам, за исключением случаев, когда в их доказательстве участвуют леммы; тогда все доказательство теоремы окаймлено двойными знаками $\triangleleft\triangleleft$ и $\triangleright\triangleright$. Сочетание $\triangleleft\ \triangleright$ означает «очевидно» либо «непосредственно проверяется». Следствие — это то, что всегда очевидно, исходя из доказанного ранее.

Знак $\Longleftrightarrow$ заменяет слова «тогда и только тогда, когда». Знак $:=$ означает равенство по определению.

* * *

Таковы наши благие намерения. А вот насколько эту «декларацию о намерениях» удалось воплотить в жизнь — судить, конечно, вам.

Благодарности

В ходе работы над этой книгой мне неоднократно приходилось обращаться с вопросами к своим коллегам — специалистам в той или иной области функционального анализа. В частности, немало просвещенных советов я получил от А. М. Степина и О. Г. Смолянова.

Я также благодарен своему другу и ученику А. Ю. Пирковскому, фактически выполнившему роль научного редактора этой книги. Если нам удалось достичь того, что множество ошибок и опечаток в этой книге из «всюду плотного» стало «нигде не плотным», то это целиком и полностью его заслуга. Помимо этого, А. Ю. Пирковский сделал несколько ценных предложений по усовершенствованию текста и, в частности, обогатил его рядом новых полезных упражнений.

Кроме того, я благодарен своему другу и ученику С. С. Акбарову, который прочитал часть рукописи и высказал ряд ценных критических замечаний.

Наконец, я сердечно признателен издательству Московского Центра непрерывного математического образования за предложение написать этот учебник и Российскому фонду фундаментальных исследований за предоставленный для этого грант.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Автор сердечно признателен издательству МНЦМО за предложение выпустить второе издание этой книги.

Текст, который вы видите перед собой, по большей части совпадает с прежним. Но всё же есть несколько отличий, на которые мне хотелось бы обратить ваше внимание.

Дело в том, что за время, прошедшее с момента выхода первого издания книги, в функциональном анализе произошли два сенсационных события, можно сказать, большое и маленькое.

В некоторых местах нашего учебника мы формулировали некоторые нерешенные проблемы. В частности, было обращено внимание читателя на один из наиболее важных вопросов: бывают ли банаховы пространства, «настолько экзотические», что любой ограниченный оператор, действующий в таком пространстве, является суммой скалярного (= кратного тождественному) и компактного операторов? Так вот: теперь известно, что такие пространства действительно существуют; более того, их можно найти среди тех, у которых сопряжённое пространство изометрически изоморфно l_1. Эта замечательная и очень трудная теорема доказана Спиросом Аргиросом и Ричардом Хэйдоном в 2009 году. Разумеется, моей обязанностью было сообщить об этом недавнем открытии.

Второе изменение связано с вопросом о том, как доказывать одну из важнейших теорем функционального анализа — теорему Банаха–Штейнхауса, или принцип равномерной ограниченности. Как правило, сравнительно короткое доказательство этой теоремы, содержавшееся в учебниках, использовало сильное средство — теорему Бэра. Были и другие доказательства, не опиравшиеся на теорему Бэра. Однако в них применялась слишком сложная техника, чтобы включать их в учебники. Но совсем недавно появилось новое доказательство, не использующее теорему Бэра и в то же время весьма короткое и прозрачное. Его придумал Алан Сокал в 2010 году. Это доказательство включено во второе издание книги. Впрочем, в новом издании приводится и традиционное доказательство, поскольку оно также элегантно и поучительно.

Наконец, третье изменение касается доказательства ещё одной фундаментальной теоремы — теоремы Планшереля о преобразовании Фурье квадратично интегрируемых функций. А именно, тот факт, что для функции, одновременно интегрируемой и квадратично интегрируемой, её классическое преобразование Фурье почти всюду совпадает с «гильбертовым», мы доказываем по-иному, чем это обычно делается в учебниках. Наше рассуждение использует преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста, которое можно рассматривать как продолжение обеих указанных выше разновидностей преобразования Фурье.

В заключение — об опечатках. К сожалению, их очень много в первом издании книги, и это несмотря на все усилия автора и первых читателей рукописи. Приходится признать, что фраза о «нигде не плотном множестве опечаток», содержавшаяся в прежнем тексте, была, мягко говоря, чересчур оптимистичной. Теперь, надеемся, их значительно меньше. В выявлении опечаток приняли участие многие читатели книги. Всем им я выражаю огромную благодарность. Особенно хотелось бы отметить большую работу по чистке этих авгиевых конюшен, выполненную А. Канунниковым, Ю. В. Кузьменко, Н. Т. Немешем, И. Д. Ремизовым и С. М. Штейнером.