§ 2. Доказательство по индукции

Уже некоторые предложения предыдущего параграфа можно рассматривать как примеры использования метода математической индукции для доказательства геометрических теорем. Например, предложение примера 7 можно сформулировать так: доказать, что сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$; в примере 8 было доказано, что непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник на $n-2$ треугольника. В этом параграфе мы рассмотрим дальнейшие примеры такого же рода.

Пример 10. Дано n произвольных квадратов. Доказать, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.

Решение. 1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем, что и при $n=2$ оно также справедливо. Обозначим стороны заданных квадратов $ABCD$ и $abcd$ соответственно через x и y; пусть $x \geqslant y$. На сторонах квадрата $ABCD$ со стороной x (рис. 5*а*) отложим отрезки $AM = BN = CP = DQ = \dfrac{x+y}{2}$ и разрежем этот квадрат по прямым MP и NQ, которые, как легко видеть, пересекаются в центре O квадрата и образуют между собой прямой угол, разбивая квадрат на четыре равные части. Эти куски приложим ко второму квадрату, как показано на рис. 5*б*.

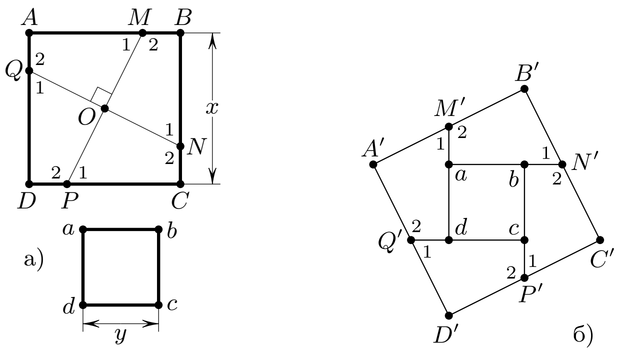

Рис. 5

Полученная фигура тоже будет квадратом, так как углы при точках M', N', P', Q' развёрнутые, углы A', B', C', D' прямые и $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.

2°. Допустим, что наше утверждение уже доказано для n квадратов, и пусть дано $n+1$ квадратов $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$.

Выберем любые два из этих квадратов, скажем K_n и K_{n+1}. Как показано в п. 1°, разрезая один из этих квадратов и прикладывая полученные куски ко второму, можно получить новый квадрат K'. Далее, согласно сделанному нами предположению квадраты $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, K'$ можно так разрезать на части, что из этих частей можно сложить новый квадрат, что и требовалось доказать.

Пример 11. Дан треугольник ABC. Через его вершину C проведено $n-1$ прямых $CM_1, CM_2, \ldots, CM_{n-1}$, разбивающих треугольник на n меньших треугольников $ACM_1, M_1CM_2, \ldots, M_{n-1}CB$. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ соответственно радиусы вписанных и вневписанных окружностей этих треугольников (все вневписанные окружности вписаны в угол C треугольника; см. рис. 6 *а*), и пусть r и ρ — радиусы вписанной и вневписанной окружностей самого треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

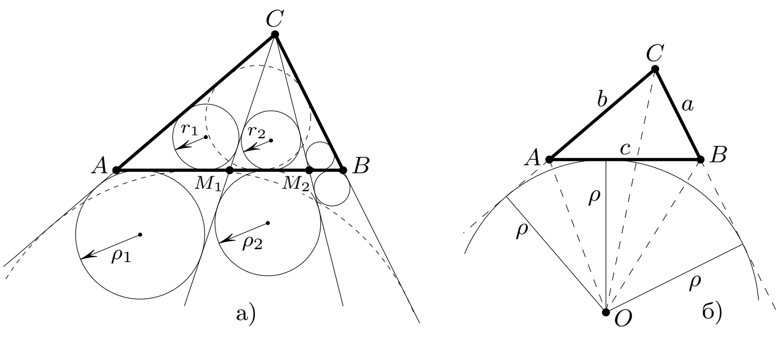

Рис. 6

Решение. Обозначим через S площадь треугольника ABC и через p — его полупериметр; тогда, как известно, $S = pr$. С другой стороны, если O — центр вневписанной окружности этого треугольника (рис. 6 *б*), то

$$S = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OAB} = \\ = \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}a\rho - \frac{1}{2}c\rho = \frac{1}{2}(b+a-c)\rho = (p-c)\rho;$$

следовательно,

$$pr = (p-c)\rho \quad \text{и} \quad \frac{r}{\rho} = \frac{p-c}{p}.$$

Далее, по известным формулам тригонометрии

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)(p-a)(p-c)}{p(p-a)p(p-b)}} = \frac{p-c}{p} = \frac{r}{\rho}. \tag{8}$$

После этих предварительных замечаний обратимся к доказательству теоремы.

1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем его справедливость для $n=2$. В этом случае треугольник ABC прямой CM разбит на два меньших треугольника ACM и CMB. В силу формулы (8) имеем

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle CMA}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle CMB}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} =$$
$$= \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{\rho}.$$

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для $n-1$ прямых, и пусть дано n прямых $CM_1, CM_2, \ldots, CM_n$, разбивающих треугольник ABC на $n+1$ меньших треугольников $ACM_1, M_1CM_2, \ldots$ $\ldots, M_nCB$. Рассмотрим два из этих треугольников, скажем ACM_1 и CM_1M_2. Как мы видели в п. 1°,

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}},$$

где r_{12} и ρ_{12} — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ACM_2. Но для n треугольников $ACM_2, M_2CM_3, \ldots, M_nCB$ в силу сделанного предположения имеет место равенство

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}}\cdot\frac{r_3}{\rho_3}\ldots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

и, следовательно,

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\ldots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}.$$

Задача 6. Пусть прямые CM и CM' двумя способами разбивают треугольник ABC на два треугольника ACM, CMB и ACM', $CM'B$; r_1, r_2 и r_1', r_2' — соответственно радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники. Докажите, что если $r_1 = r_1'$, то $r_2 = r_2'$, и что аналогичное свойство имеет место также и для радиусов вневписанных окружностей.