Гармония в алгебре

К столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева

В нашем эссе речь пойдет о человеке, который был основателем современной алгебраической школы в Ленинграде (Петербурге), человеке, который оказал огромное духовное влияние на своих современников, человеке высочайшей культуры, истинно по-петербургски интеллигентном, — Дмитрии Константиновиче Фаддееве.

Дмитрий Константинович родился, как сказали бы мы теперь, в типичной интеллигентской семье начала XX века. Дед Дмитрия Константиновича происходил из крестьян Самарской губернии, и фамилия его возникла вместе с вольной, которую он получил незадолго до отмены крепостного права. Отец, Константин Тихонович, был человеком весьма незаурядным, он при поддержке родственников закончил Высшую техническую школу в Москве, где был замечен А. Н. Крыловым, который рекомендовал его по окончании Школы на Невский завод в Санкт-Петербурге, откуда его уже инженером послали на стажировку в Германию. Родословная матери, Любови Германовны, восходила к древнему дворянскому роду Гулевичей. В имении деда, которое находилось в небольшом городке Юхнове Смоленской губернии (ныне Калужская область), и родился 30 июня 1907 г. мальчик Митя. В доме матери Митя получил прекрасное музыкальное образование, и, имея абсолютный музыкальный слух и большую тягу к музыке, он поступил уже после Гражданской войны в консерваторию на композиторское отделение. Параллельно в 1923 г. он поступил в Петроградский университет, так как, судя по всему, унаследовал от отца математические способности.

Но такая раздвоенность не могла продолжаться долго, и на третьем курсе Дмитрию пришлось выбирать между музыкой и математикой. Выбор пал на математику, которой в итоге он посвятил всю жизнь, не бросая при этом занятия музыкой на очень высоком,

---

Вестник РАН. 2007. Вып. 7. С. 634—639 (совместно с С. В. Востоковым).

практически профессиональном уровне. Сестра Дмитрия Константиновича, работая в Колтушах у академика И. П. Павлова, пригласила его проверить музыкальный слух. Эту проверку, добровольно, разумеется, проходили многие известные тогда дирижеры. Так вот, Дмитрий Константинович превзошел очень многих из них.

Первыми учителями Дмитрия Константиновича в университете были такие выдающиеся математики, как И. М. Виноградов и Б. Н. Делоне (у первого он писал диплом, а у второго учился в аспирантуре), а потому сначала его заинтересовала в математике классическая теория чисел, точнее диофантовы уравнения. Ему удалось значительно расширить класс уравнений 3-й и 4-й степеней, допускающих полное решение, он получил оценки ранга группы рациональных точек на эллиптических кривых с параметром A, причем для таких больших A, что Андре Вейль, ознакомившись с этими результатами, не поверил тому, что они были сделаны вручную.

Как рассказывал сам Дмитрий Константинович, после окончания университета найти работу по специальности было достаточно трудно, и он работал в разных местах, в том числе и в Палате мер и весов, где пристрастился к курению из-за больших перерывов в наблюдениях за приборами. И все же ему хватило силы воли позднее бросить эту вредную привычку. Любопытная деталь — характерной чертой того времени был дефицит практически во всем, в том числе и в бумаге, поэтому свои вычисления, а они были достаточно большими, Дмитрию Константиновичу приходилось проводить на обратной стороне обоев.

Начиная с 1933 г. Дмитрий Константинович преподавал в Ленинградском университете, с которым была связана вся его жизнь и деятельность вплоть до кончины 30 октября 1989 г. В 1935 г. он защитил диссертацию столь блестяще, что за нее сразу же была присуждена докторская степень, а в 1937 г. стал профессором Ленинградского университета. Отметим, что в послевоенные сталинские годы (1952—1954) он занимал очень непростую должность декана математико-механического факультета.

В Математическом институте Академии наук Д. К. Фаддеев работал с момента его создания в 1932 г. до 1934 г. и с 1940 г. до своей кончины. После переезда в Москву учителя Дмитрия Константиновича — Бориса Николаевича Делоне — Д. К. Фаддеев стал признанным главой ленинградских алгебраистов. Многие годы он руководил лабораторией алгебраических методов в Ленинградском отделении математического института им. В. А. Стеклова (ЛОМИ). С 1964 г. Д. К. Фаддеев — член-корреспондент Академии наук СССР. Он был основателем и руководителем общегородского алгебраического семинара (ныне семинар имени Д. К. Фаддеева). Много лет был президентом Ленинградского математического общества.

Первая, формирующая математическую индивидуальность, часть научного пути Д. К. Фаддеева приходится на эпоху, когда советская математика только складывалась и приобретала ту форму, которую мы знаем по временам расцвета Советского Союза. Это была эпоха, очень интересная своими контрастами. В частности, некоторые области математики тогда находились на очень высоком уровне, в то время как другие, часто очень важные, классические ее разделы были совершенно неизвестны. Почти полная изоляция от математики Запада, наступившая к 1935 г., оставляла преодоление этих контрастов исключительно нашим внутренним силам. И такая работа составляла большую часть тогдашней математической деятельности, часть невидимую, мало, а то и совсем никак не отразившуюся в научных публикациях.

В качестве примера таких контрастов напомним, что у нас тогда сложилась школа теории функций действительного переменного, вряд ли имевшая равную себе в мире (Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин). Была прекрасно известна теоретико-множественная топология (П. С. Александров и П. С. Урысон). На высоком уровне находился функциональный анализ в духе теории банаховых пространств. Позднее очень популярной стала абстрактная алгебра (А. Г. Курош). Но и в некоторых классических областях поддерживался высокий уровень — продолжалась, например, работа петербургской (а в это время ленинградской) школы теории чисел, не ослабевал интерес к теории дифференциальных уравнений (Н. М. Гюнтер, В. В. Степанов).

С другой стороны, совершенно неизвестными оставались такие разделы, как классическая теория компактных римановых поверхностей алгебраических функций и тем более алгебраическая геометрия. Неизученной была теория полей классов, даже теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и теория расширений операторов стали широко известны лишь к самому концу 30-х годов.

Изучение многих классических разделов математики было не «учебным процессом», происходило не на семинарах и спецкурсах, а больше походило на творческий процесс или, по крайней мере, на сотрудничество с истинными авторами. Во многих случаях само осознание того, что существует совершенно неизвестный глубокий раздел математики, было откровением. Такое положение делало работу математика исключительно интересной. Стиралась грань между изучением математической литературы и собственными научными исследованиями — все это сливалось в один процесс «открытия математики».

Но эта ситуация порождала и большие трудности. Много сил, которые можно было бы потратить на собственные исследования, уходило на продумывание и понимание уже давно сложившихся и неизвестных только у нас разделов. А нередко работа в таких областях грозила тем, что радовавшее душу открытие оказывалось лишь переоткрытием известного результата. Но именно здесь сказалась удивительная черта Дмитрия Константиновича. Он был редким математиком, готовым с радостью выслушать собеседника, что бы тот ни хотел ему рассказать. В его реакции на математический результат отступало на задний план то, кем он был получен, — шла ли речь о его собственном открытии, или о результате того, кто ему об этом рассказывал, или о старой, но раньше неизвестной говорящему теореме, — основную роль играла красота результата.

Это качество определило ту громадную роль, которую Д. К. Фаддеев играл в развитии нашей математики, — роль, далеко не полностью отразившуюся в его научных публикациях.

Чтобы проиллюстрировать характер занятий математикой в 30-е годы, приведем следующий пример. Дмитрий Константинович привез в Москву работу о строении кольца целых чисел поля алгебраических чисел как модуля над кольцом целых чисел некоторого подполя. В частном случае это теорема о фундаментальном базисе, присутствующая во всех учебниках теории полей алгебраических чисел, начиная со знаменитого «Обзора» Д. Гильберта. Вскоре выяснилось, что теорема не нова, — ее доказал Е. Штейниц в форме теоремы о преобразовании прямоугольных матриц. И все же жаль, что Фаддеев не опубликовал свою работу (например, как методологическое новшество), ведь результат Штейница мало известен алгебраистам, его и сейчас нет в основных руководствах по коммутативной алгебре, а много позже, уже после войны, Э. Артин переоткрыл и опубликовал его!

Дмитрий Константинович внес вклад почти во все разделы современной ему математики, но в центре его творчества всегда была алгебра, ему принадлежат значительные результаты в алгебраической теории чисел, алгебраической геометрии, теории Галуа, теории алгебр, теории представлений, он был одним из создателей гомологической алгебры. Он много работал и в других областях математики — теории функций, геометрии, теории вероятностей, геометрической кристаллографии и особенно плодотворно — в численных методах математики. В списке его трудов более 160 названий.

При всем разнообразии математических интересов Дмитрия Константиновича была одна тема, которой он отдал больше всего сил и которая была особенно близка его душе, — это теория Галуа и, в частности, так называемая задача погружения. Речь идет о следующем вопросе. Классическая теория Галуа изучает группу, которая появляется в так называемых расширениях полей Галуа, и связывает подгруппы этой группы с промежуточными расширениями. Обратная задача теории Галуа исследует, каким расширениям соответствует заданная группа. Естественным обобщением обратной задачи теории Галуа является задача погружения, которой занимались ведущие алгебраисты того времени, в том числе и Д. К. Фаддеев.

Смысл решения задачи погружения в том, что, зная, какие группы реализуются как группы Галуа расширения данного поля и как решается задача погружения для них, можно методами теории Галуа описать всю совокупность сепарабельных расширений этого поля. Особенно красива задача погружения с абелевым ядром. В этом случае она тесно связана с обратной задачей теории Галуа для разрешимых групп.

К этому случаю относятся и исследования Д. К. Фаддеева.

Он открыл очень важное условие, необходимое для разрешимости задачи погружения, названное им условием согласности. Некоторое время было неясно, является ли это условие достаточным. Х. Хассе переоткрыл условие согласности на несколько лет позже (тут сыграла роль слабая циркуляция журналов во время войны) и высказал предположение, что оно и достаточно. Д. К. Фаддеев такой гипотезы не высказывал, и ему принадлежит один из первых примеров недостаточности условия согласности для разрешимости задачи погружения. Разделение условий разрешимости задачи погружения на условие согласности и дополнительные условия — пример очень важного явления, потом встречающегося в различных вопросах алгебраической теории чисел.

Прогресс в теории Галуа во второй половине XX века обязан в наибольшей степени усилиям московской и ленинградской школ, возглавляемых соответственно И. Р. Шафаревичем и Д. К. Фаддеевым. Так, было доказано, что в случае локальных полей при абелевом ядре условие согласности гарантирует разрешимость задачи погружения (С. П. Дёмушкин и И. Р. Шафаревич). Полностью задача погружения полей в случае абелева ядра была изящно решена А. В. Яковлевым — учеником Д. К. Фаддеева. Итогом деятельности Д. К. Фаддеева в этой области стала написанная им в соавторстве со своими учениками В. В. Ишхановым и Б. Б. Лурье книга «Задача погружения в теории Галуа» (сам Д. К. Фаддеев не дожил нескольких месяцев до выхода книги в свет).

Занимаясь задачей погружения, Д. К. Фаддеев столкнулся с формализмом так называемых «систем факторов», все время в этой связи встречающихся, и обнаружил, что он является частным случаем гораздо более общей конструкции. Так была открыта теория когомологий групп. По воспоминаниям сына Дмитрия Константиновича, когда они находились в эвакуации в городе Казани в 1943 г., в какой-то из вечеров отец ходил по комнате весь возбужденный и восклицал, что он открыл нечто замечательное (как оказалось позже, это были коциклы). Сын спросил его: «А сколько людей в мире поймет то, что ты сейчас сделал?» — «Ну, человек, может быть, пять», — ответил отец. Одновременно теорию когомологий групп открыли С. Эйленберг и С. Маклейн, которые пришли к ней исходя из совсем другого вопроса. Создание теории когомологий групп было одним из самых значительных математических событий середины этого века. Ряд математиков предчувствовали существование такой теории. Так, А. Вейль в комментариях к своему собранию сочинений вспоминает, как в 30-е годы говорил своим друзьям, что ему хотелось бы определить «числа Бетти конечной группы». Трехмерная группа когомологий встречалась у О. Тейхмюллера, и, приведя соотношение, определяющее трехмерный коцикл, он пишет, что обобщение этого соотношения для случая $n > 3$ ему указал Е. Витт. Возможно, Витт знал общее определение групп когомологий (или, по крайней мере, коциклов), но не опубликовал его. Дело, конечно, не сводилось к одному определению, необходимо было систематическое развитие теории — это сделали Д. К. Фаддеев и независимо С. Эйленберг и С. Маклейн. Теория когомологий групп была зерном, из которого выросло мощное дерево гомологической алгебры, обильно плодоносящее и до сих пор. Одним из наиболее значительных достижений гомологической алгебры было создание алгебраической K-теории. И в этой области в школе Фаддеева были достигнуты воистину впечатляющие успехи. Самым ярким примером является теорема Меркурьева—Суслина, определяющая в явном виде группу Брауэра почти произвольного поля. Известный математик А. Алберт сформулировал еще до войны в виде гипотезы полученный ими позже результат (даже лишь часть его), и чувствовалось, насколько безнадежной и недоступной эта гипотеза казалась. Такой сильный математик, как Р. Брауэр, пытался проверить одно ее следствие (всякое тело имеет поле разложения с разрешимой группой Галуа), но смог сделать это лишь для тел очень небольшой размерности.

Еще есть одна большая и находящаяся только в начале своего развития область алгебры, где влияние Дмитрия Константиновича было исключительно глубоко, — это исследование неполупростых объектов (колец, модулей). Классическим примером является теория представлений конечных групп над полем ненулевой характеристики. Пожалуй, никакая другая часть алгебры не имеет таких многочисленных приложений в математике и математической физике. Во всех этих вопросах алгебраическая сторона выяснена, в принципе, до конца: по-видимому, последним завершающим результатом является теорема Меркурьева—Суслина о строении группы Брауэра, упоминавшаяся выше. Но, выходя за пределы полупростых колец и модулей, мы попадаем в совершенно неисследованную область, а несколько десятилетий назад здесь вообще ничего не было известно. К этой области относится теория представлений неполупростых алгебр, а также конечных групп над полем конечной характеристики. Но к ней же надо отнести и ряд «целочисленных» вопросов, например теорию целочисленных представлений конечных групп. По аналогичной причине сюда же естественно отнести и теорию представлений колец алгебраических чисел.

Уже очень давно Дмитрий Константинович обратил внимание на эту громадную неисследованную область, которой принадлежит большое будущее. В результате исследований, как его самого, так и его многочисленных учеников, здесь теперь имеются существенные продвижения. Они касаются в основном структуры соответствующих колец и строения их представлений. На ряде примеров (представления конечных групп, неполупростых алгебр) было обнаружено существование такого типа задач, которые в некотором смысле (точно определенном) имеют «финитный» ответ, и проведено почти исчерпывающее исследование таких задач (они называются «ручными»). Особенно яркие результаты получены учениками Д. К. Фаддеева — Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером. Все достижения Дмитрия Константиновича и его учеников являются первым серьезным прорывом в алгебру неполупростых объектов, когда от хаоса, каким эта область до того представлялась, была отвоевана большая ее часть, управляемая красивыми закономерностями.

Удивительная способность Дмитрия Константиновича видеть простое в сложном проявилась еще в одной, может быть, не столь известной работе о мультипликативной группе циклического p-расширения локального поля. Он изучал ее относительно двух различных структур — операторов из группы Галуа и символа Гильберта, увидел прямую связь с обычным линейным, только записанным мультипликативно пространством с оператором и скалярным произведением и далее применил аналог хорошо известной теории жордановой формы. Как и многие другие, эта работа стала началом целого цикла исследований мультипликативных структур в локальных полях, а также симплектических пространств с операторами, развитых его учениками, в первую очередь З. И. Боревичем и А. В. Яковлевым. Последний применил разработанную им теорию симплектических пространств к изучению топологической структуры группы Галуа алгебраического замыкания локального поля.

Несколько особняком в научном наследии Д. К. Фаддеева стоят его работы в области вычислительной математики. Но и здесь в полной мере проявилась способность Дмитрия Константиновича видеть глубокие связи и едва намечающиеся тенденции. В основном эти работы относятся к исследованию устойчивости численного решения систем линейных алгебраических уравнений и оценке результатов вычислений.

Надо отметить, что на рубеже 50-х годов в вычислительной математике происходили поистине революционные изменения, связанные с быстрым развитием электронно-вычислительной техники, и монография Д. К. Фаддеева «Вычислительные методы линейной алгебры», написанная совместно с женой — Верой Николаевной Фаддеевой, оказалась одной из первых книг, отвечающих на целый ряд вопросов, возникших в этой новой ситуации.

Глубина подхода к рассматриваемым задачам обеспечила этой книге редкое для подобной литературы долгожительство — монография переведена на многие языки, до сих пор переиздается и является настольной книгой новых поколений математиков-вычислителей. За эту монографию была получена Государственная премия.

Подчеркивая свою любовь к вычислениям, Дмитрий Константинович любил часто повторять: «Я бухгалтер», выговаривая при этом каждую букву.

Дмитрий Константинович обладал несомненным даром математического предвидения. Вспоминаются его слова, когда до Ленинграда дошла весть, что великую теорему Ферма переформулировали на языке эллиптических кривых (Г. Фрей, 1985). Он предсказал, что теперь очень скоро эта знаменитая твердыня падет, что и произошло в скором времени (Э. Уайлс и Р. Тейлор, 1994), правда, уже, к сожалению, после кончины Дмитрия Константиновича.

Нам неизвестно, насколько религиозным человеком был Дмитрий Константинович (в то время это как-то не обсуждалось, как сегодня, и это, на наш взгляд, лучше нынешнего подчеркивания), но он, несомненно, ставил Человека, его интеллект, выше всего. Об этом могут свидетельствовать такие два эпизода. Первый раз он радовался превосходству человека над машиной, когда П. С. Новиков в 1957 г. в отрицательном смысле решил проблему о тождестве слов в группах, т. е. выяснилось, что невозможно различить элементы группы, по-разному записанные, и человек тем самым оказался незаменимым. Второй случай произошел на защите докторской диссертации Ю. В. Матиясевича, доказавшего отсутствие общего алгоритма для решения диофантовых уравнений (10-я проблема Гильберта). Возник философский спор между С. И. Адяном, который считал отрицательный результат в проблеме Гильберта большой философской неудачей, и Д. К. Фаддеевым, который, напротив, ликовал по поводу превосходства человека над машиной.

Много сил Д. К. Фаддеев отдавал перестройке математического образования. Он автор многих замечательных задачников и учебников для школ и университетов. Достаточно вспомнить знаменитый, многократно переизданный «Сборник задач по высшей алгебре» (написанный совместно с И. С. Соминским), а также «Лекции по алгебре» [1]. Нам кажется уместным процитировать самого Дмитрия Константиновича, чтобы был понятен его подход к обучению. «Я считаю, что их (абстрактные понятия) следует вводить по мере

[1] *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977 (и последующие переиздания); *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.

того, как удается возбудить в учащихся потребность в обобщении, или, по крайней мере, если имеется возможность достаточно иллюстрировать общие понятия более конкретным материалом» (из предисловия к книге «Лекции по алгебре»).

Дмитрий Константинович был одним из организаторов Всесоюзных математических олимпиад, стоял у истоков Юношеской математической школы в Петербурге (1960 г.), а также знаменитого физико-математического 45-го интерната (1964 г.). Он живо откликался на любую просьбу прочитать популярную лекцию для школьников, например, читал лекции в Выборге в первой Летней математической школе (1973 г.). Постоянно вне лекционных сеток он вел кружок по алгебре для первокурсников, что тогда было совершенно естественным, а нынче, пожалуй, показалось бы многим экзотикой.

Зная, как легко Дмитрий Константинович отдает свои идеи, как мало он склонен подчеркивать свой личный вклад, как много сил готов тратить на обсуждение работ своих учеников и коллег, можно было предсказать, что его влияние на развитие математики не будет столь наглядно видимо и так широко признано, как оно того заслуживает. Это и произошло. К Д. К. Фаддееву очень подходят слова о Жуковском, которому он и в других отношениях близок по духу, сказанные Пушкиным: «Его переводили бы на все языки, если бы он сам не переводил так много». Только слово «переводить» надо заменить, например, на «цитировать». Действительно, вклад Дмитрия Константиновича в математику оценен сейчас, как нам представляется, совершенно недостаточно. Да и роль Д. К. Фаддеева как одного из двух независимых создателей теории когомологий групп упоминается далеко не всегда. А. Гротендик пришел к своей теории группы Брауэра, видимо, не зная работ Фаддеева. Но и в более поздних исследованиях и обзорах на эту тему ссылки на работы Д. К. Фаддеева чаще всего отсутствуют, хотя теперь видно, что его чисто алгебраический подход в некоторых вопросах, например в проблеме Люрота, дает более простой и естественный аппарат. Примеры можно было бы умножить.

Самого Дмитрия Константиновича такое положение нисколько не огорчало. И он был, конечно, глубоко прав. Если справедлив принцип «рукописи не горят», то тем более «не горят» математические идеи. И не только в том смысле, что будущие математики или историки математики восстановят истинное положение вещей.

Гораздо существеннее то, что для самого Дмитрия Константиновича важна была лишь красота создаваемых им математических идей, а эта красота будет существовать всегда и будет нести в себе отпечаток его индивидуальности.

Приведем еще одно воспоминание о Фаддееве, принадлежащее писателю Евгению Шварцу.

«Я не могу представить, что он изображает профессора, видит себя со стороны и любуется: „Я декан! Ай да я! Я выдающийся. Мы ученые!..“ и тому подобное. От врожденного отсутствия позы он, как таковой, стоит против предмета и смотрит на него не с условной, а с естественной точки зрения, без посредников» [1].

Дмитрий Константинович навсегда запомнится нам таким — обсуждающим математическую работу, с улыбкой, слегка склонив голову, как будто прислушивается к какой-то ему одному слышной красивой музыке.

С. В. Востоков, профессор,
И. Р. Шафаревич, академик

[1] *Шварц Е.* Живу беспокойно...: Из дневников. Л.: Сов. писатель, 1990. С. 591.