§ 16. Эволюты, световые каустики и эквидистанты

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y гладкое семейство гладких кривых $F(x, y, c) = 0$, зависящих от параметра $c \in \mathbb{R}$. Кривую, заданную гладким отображением

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

будем называть *огибающей* семейства $F(x, y, c) = 0$, если существует такое гладкое отображение

$$t \mapsto c = c(t),$$

что для всюду плотного множества значений t выполнены следующие условия:

$$c'(t) \neq 0, \quad \gamma'(t) \neq 0$$

и γ касается кривой $F(x, y, c(t)) = 0$ в точке $\gamma(t)$.

Из условия касания гладких кривых (см. с. 64) следует перпендикулярность векторов

$$(x'(t), y'(t)) \quad \text{и} \quad (F'_x, F'_y)|_{(x(t), y(t), c(t))}.$$

Поэтому огибающая удовлетворяет системе уравнений:

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0.$$

Пример 16.1. Рассмотрим уравнение Клеро

$$y = xy' + f(y'),$$

где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = xc + f(c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Оно задаёт однопараметрическое семейство интегральных прямых на расширенной фазовой плоскости с координатами x, y.

У уравнения Клеро есть также особая интегральная кривая. Она задаётся параметрически формулами:

$$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = f(c) - cf'(c). \end{cases}$$

Эта кривая является огибающей семейства прямых $y = xc + f(c)$.

Пусть, например, $f(y') = (y')^3$. Тогда особая интегральная кривая задаётся уравнением $4x^3+27y^2=0$. Эта кривая имеет особенность в начале координат: полукубическую точку возврата.

Пример 16.2. Рассмотрим произвольную гладкую кривую на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$. Множество центров её кривизны называется *эволютой*. Эволюта кривой

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

задаётся параметрически формулами:

$$\begin{cases} x = x(t) - y'(t)\dfrac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \\ y = y(t) + x'(t)\dfrac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \end{cases}$$

Эволюта является огибающей семейства нормалей к кривой. Например, эволютой эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ является астроида

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Она имеет четыре полукубические точки возврата (см. рис. 12).

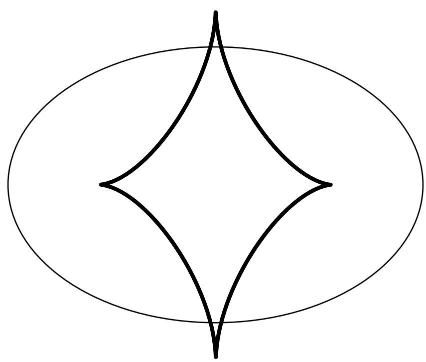

Рис. 12. Эволюта эллипса

Огибающие встречаются и в многомерных пространствах. Мы приведём лишь несколько простых примеров.

Пример 16.3. Рассмотрим гладкое семейство гладких гиперповерхностей $F(q,c)=0$ в пространстве $\mathbb{R}^n=\{q\}$, зависящих от параметра $c\in\mathbb{R}^{n-1}$. Гиперповерхность, заданная гладким отображением

$$\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto q=\Gamma(x),$$

называется *огибающей* семейства, если существует такое гладкое отображение $x\mapsto c(x)$, что для всюду плотного множества значений x ранг матриц Якоби $\frac{\partial c}{\partial x}(x)$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x)$ равен $n-1$ и Γ касается гиперповерхности $F(q,c(x))=0$ в точке $\Gamma(x)$. Аналогично случаю плоских кривых, огибающая семейства гиперповерхностей $F(q,c)=0$ удовлетворяет системе уравнений

$$F(q,c)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial c}(q,c)=0.$$

Пример 16.4. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ гладкое семейство гладких кривых

$$\gamma_c\colon t\mapsto q=\gamma_c(t),$$

зависящих от параметра $c\in\mathbb{R}^{n-1}$. Гиперповерхность, заданная гладким отображением

$$\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto q=\Gamma(x),$$

называется *огибающей* семейства, если существует такое гладкое отображение $x\mapsto c(x)$, что для всюду плотного множества значений x ранг матриц Якоби $\frac{\partial c}{\partial x}(x)$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x)$ равен $n-1$ и Γ касается кривой $\gamma_{c(x)}$ в точке $\Gamma(x)$. Огибающая семейства кривых $\gamma_c(t)$ является образом при отображении

$$\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,\quad (c,t)\mapsto q=\gamma_c(t),$$

множества точек (c,t), в которых ранг его матрицы Якоби меньше n.

Пример 16.5. Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в $\mathbb{R}^n$. Пусть N_q — нормаль к M в точке $q\in M$. Отметим на каждой нормали N_q центры главных кривизн гиперповерхности M в точке q. Множество всех полученных таким образом точек называется *фокальным множеством* или *эволютой* гиперповерхности M.

Эволюта гиперповерхности является огибающей семейства её нормалей N_q, $q \in M$.

Пример 16.6. Огибающая системы световых лучей в геометрической оптике называется *каустикой*. Точки каустики светятся ярче остальной части освещенной поверхности. Каустику можно наблюдать, например, на дне чашки в солнечный день при подходящем её расположении относительно солнца.

А именно, свет, отражаясь от (искривлённой) боковой поверхности чашки, определяет двухпараметрическое семейство лучей. Это семейство может иметь огибающую в объемлющем пространстве. Пересечение огибающей с дном чашки и даёт на нём ярко светящуюся кривую (см. рис. 13).

Рис. 13. Каустика на дне чашки

Пример 16.7. Пусть M — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что она *коориентирована*, т. е. к каждой точке $x \in M$ приложен единичный нормальный вектор ν_x, непрерывно зависящий от x. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ определено множество

M_t, состоящее из точек вида $q_x^t = x + t\nu_x$, $x \in M$. Это множество называется t-*эквидистантой* гиперповерхности M.

Эквидистанты гиперповерхности M общего положения являются огибающими. А именно, t-эквидистанта гиперповерхности M является огибающей семейства гиперплоскостей π_x^t, $x \in M$, где π_x^t — гиперплоскость, проходящая через точку q_x^t и коллинеарная[1] касательной гиперплоскости к M в точке x.

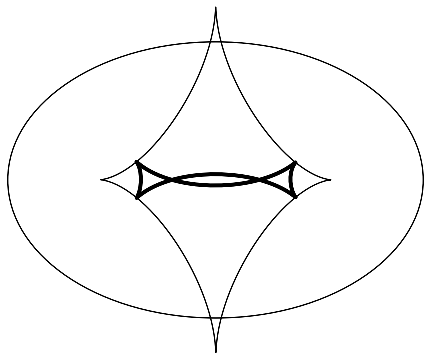

Рис. 14. Эквидистанта эллипса

Если t мало по абсолютной величине, то t-эквидистанта является гладкой гиперповерхностью. Однако с ростом $|t|$ у неё могут появиться точки, в которых хотя бы одна из её ветвей является особой. Эти точки лежат на эволюте исходной гиперповерхности M. Более того, в момент t своего появления (или исчезновения) такая особая точка t-эквидистанты является особой точкой эволюты (см. рис. 14). Доказательство этих фактов приведено в § 19.

Упражнения

1. Нарисуйте эволюту и семейство эквидистант параболы.

2. Коориентация гиперповерхности индуцирует естественную коориентацию её эквидистант. Как меняется коориентация t-эквидистанты эллипса при изменении параметра t?

---

[1] Две гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ мы называем *коллинеарными*, если они либо совпадают, либо не пересекаются.