

Введение

Очень грубо говоря, теория представлений изучает симметрию в линейных пространствах. Это красивый раздел математики, который имеет множество приложений, простирающихся от теории чисел и комбинаторики до геометрии, теории вероятностей, квантовой механики и квантовой теории поля.

Теория представлений зародилась в 1896 г. в работах немецкого математика Ф. Г. Фробениуса. Толчком к её появлению послужило письмо, написанное Фробениусу Р. Дедекиндом. В этом письме Дедекинд сделал следующее наблюдение. Возьмём таблицу умножения конечной группы G и превратим её в матрицу X_G , заменив каждый элемент g этой таблицы переменной x_g . Тогда определитель матрицы X_G раскладывается в произведение неприводимых многочленов от переменных $\{x_g\}$, каждый из которых входит в разложение с кратностью, равной его степени. Дедекинд проверил этот поразительный факт в нескольких частных случаях, но не смог доказать его в общем виде. И он рассказал об этой задаче Фробениусу. Чтобы найти её решение (которое мы объясним ниже), Фробениус создал теорию представлений конечных групп.

Цель данной книги — дать «холистическое» введение в теорию представлений, излагая её как единую дисциплину, изучающую представления ассоциативных алгебр, и трактуя теории представлений групп, алгебр Ли и колчанов как частные случаи. Она задумана как учебник для старшекурсников и начинающих аспирантов и должна быть доступна студентам с сильной подготовкой по линейной алгебре и базовыми знаниями абстрактной алгебры. Теоретический материал дополняют многочисленные задачи и упражнения, в которых затрагивается множество дополнительных тем; наиболее трудные упражнения снабжены подсказками.

Книга охватывает ряд стандартных разделов теории представлений групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли и колчанов. За более подроб-

ным изложением этих тем мы отсылаем читателя к учебникам [S], [FH] и [CR]. В основном наше изложение следует книге [FH], за исключением главы о колчанах, которая следует статье [BGP], и глав, посвящённых гомологической алгебре и конечномерным алгебрам, в отношении которых мы рекомендуем книги [W] и [CR] соответственно.

Материал организован следующим образом.

Глава 2 посвящена основам теории представлений. Здесь мы рассматриваем основы абстрактной алгебры (группы, кольца, модули, идеалы, тензорные произведения, симметрические и внешние степени и т. п.), а также даём важнейшие определения теории представлений и обсуждаем объекты, представления которых собираемся изучать (ассоциативные алгебры, группы, колчаны и алгебры Ли).

В главе 3 вводятся основные общие результаты о представлениях ассоциативных алгебр (теорема плотности, теорема Жордана — Гёльдера, теорема Крулля — Шмидта и структурная теорема для конечномерных алгебр).

В главе 4 обсуждаются фундаментальные результаты теории представлений конечных групп. Здесь мы доказываем теорему Машке и ортогональность характеров и матричных элементов, а также вычисляем таблицы характеров и разложения тензорных произведений для простейших конечных групп.

Представления конечных групп продолжают изучаться в главе 5, где мы рассматриваем более сложные и специальные темы, такие как индикатор Фробениуса — Шура, теорема Фробениуса о делимости, теорема Бёрнсайда, формула Фробениуса для характера индуцированного представления, представления симметрической группы и полной линейной группы над \mathbb{C} , представления группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$, представления полупрямых произведений и т. п.

Глава 6 содержит введение в теорию представлений колчанов (начинающееся с задачи классификации конфигураций n подпространств в векторном пространстве) и доказательство теоремы Габриэля о классификации колчанов конечного типа.

В главе 7 даётся введение в теорию категорий, в частности абелевых категорий, и объясняется, как такие категории возникают в теории представлений.

В главе 8 мы приводим краткое введение в гомологическую алгебру и объясняем, как она применяется к категориям представлений.

Наконец, глава 9 содержит краткое введение в теорию представлений конечномерных алгебр.

Кроме того, книга содержит шесть исторических интерлюдий, принадлежащих Славе Геровичу¹. Эти интерлюдии, написанные в доступном и увлекательном стиле, рассказывают о жизни и математических трудах некоторых математиков, сыгравших ключевую роль в развитии современной алгебры и теории представлений: Ф. Г. Фробениуса, С. Ли, У. Бёрнсайда, У. Р. Гамильтона, Г. Вейля, С. Маклейна и С. Эйленберга. Читателям, желающим больше узнать об истории теории представлений, мы рекомендуем работы, указанные в списке литературы к историческим интерлюдиям, в частности превосходную книгу [Cu].

Благодарности. Эта книга возникла на основе курса теории представлений, прочитанного первым автором остальным шести в марте 2004 г. в рамках Научно-исследовательской академии для старших школьников Математического института им. Клэя, и его расширенной версии, прочитанной первым автором студентам-математикам в Массачусеттском технологическом институте в осеннем семестре 2008 г.

Авторы благодарны Математическому институту им. Клэя, где была прочитана первая версия курса. Первый автор выражает искреннюю признательность Виктору Острику за помощь в подготовке этого курса и благодарит Джоша Николса-Баррера и Томаса Лэма за помощь в проведении курса в 2004 г. и полезные замечания. Кроме того, он глубоко благодарен Дарию Гринбергу за чрезвычайно внимательное чтение текста, множество полезных замечаний и поправок и предложенные им задачи 2.11.6, 3.3.3, 3.8.3, 3.8.4, 4.5.2, 5.10.2 и упражнения 5.27.2, 5.27.3, 7.9.8, а также Бьорну Пунену, читавшему курс по этой книге и предложившему много полезных замечаний и поправок. Наконец, авторы выражают признательность У. Кассельману за рисунки с изображением схем Дынкина, использованные в книге.

* * *

Авторы искренне благодарят Н. В. Цилевич за замечательный перевод книги.

¹ Я хотел бы поблагодарить профессора Этингофа и его соавторов за составление технического комментария к моей исторической монографии. Несмотря на их похвальные усилия к тому, чтобы сделать изложение максимально кратким, этот комментарий, к сожалению, безмерно разросся и в конце концов занял большую часть данного тома. Надеюсь, читатель отнесётся с должным снисхождением к избытку технических подробностей в тексте, который, по существу, является книгой по истории. — С. Герович.