Посвящается Дагмар

Предисловие

Прошло почти двадцать лет с появления тех книг, по которым до сих пор строятся университетские курсы теории графов. Канон, заданный этими книгами, способствовал определению основных направлений для дальнейших исследований и, несомненно, будет указывать направление всей дисциплине ещё долгие годы.

Но за прошедшие двадцать лет многое изменилось, и в теории графов в том числе: были открыты глубокие новые теоремы, методы и результаты, казавшиеся разрозненными, сложились в общую картину, возникли совершенно новые ветви. Чтобы не быть голословным, перечислю лишь несколько: можно вспомнить, как новое понятие списочных раскрасок закрыло пробел между такими инвариантами, как средняя степень и хроматическое число, как вероятностные методы и лемма регулярности проникли повсюду в теорию экстремальных графов и теорию Рамсея или же как совершенно новая наука о минорах графов и древесных разложениях позволила применить стандартные методы из топологии поверхностей к давним алгоритмическим проблемам на графах.

Очевидно, пришла пора для переосмысления: *каковы сегодня важнейшие области, методы и результаты, которые заслуживают вхождения в базовый курс по теории графов, чтобы лучше всего подготовить его слушателей к дальнейшему развитию науки*?

В этой книге я предпринял попытку собрать материал для подобного курса. В свете всё растущей сложности и зрелости предмета я отказался от традиции излагать сразу теорию и её приложения: книга даёт введение в теорию графов как раздел (чистой) математики; здесь вы не найдёте ни прямо выписанных алгоритмов, ни приложений «из реального мира». Я надеюсь, что это ограничение в выборе материала позволит выйти на такую существенную глубину изложения, которая пойдёт на пользу и программистам, и их коллегам-математикам. Даже тем, кто предпочитает алгоритмы, должна пойти на пользу хоть *какая-то* встреча с чистой математикой, так пусть же она произойдёт в той области науки, что уже их интересует!

В отборе и изложении материала я старался примирить две взаимно противоречащие цели. С одной стороны, я полагаю, что вводный текст должен концентрироваться на самом главном, чтобы служить руководством для новичков в этой области. Более того, он должен быстро добираться до сути дела: моё намерение состоит в том, чтобы дать хотя бы некоторое представление о глубине и методах науки. С другой стороны, я старался писать достаточно подробно, чтобы текст можно было легко и с удовольствием читать: наводящие вопросы и идеи всегда будут обсуждаться в открытую, а все приведённые доказательства будут строгими и полными.

Таким образом, типичная глава начинается с краткого обсуждения основных вопросов, стоящих в обсуждаемой области, далее следует компактное изложение классических результатов (часто с использованием более простых доказательств, чем привычных), и в завершение даются одна или две глубокие теоремы, позволяющие подлинно ощутить вкус всей области в целом. Доказательства этих заключительных результатов обычно сопровождаются, перед ними или прямо посреди, неформальным объяснением содержащихся в них главных идей, но уровень детализации в этих доказательствах ничуть не уступает их аналогам попроще. Я быстро обнаружил, что в печати некоторые из этих доказательств выглядят длиннее, чем того заслуживают их удивительно простые идеи. Я надеюсь, однако, что даже для читателя-профессионала довольно подробное изложение доказательств хотя бы позволит сэкономить время…

Если на то есть желание, предложенный текст можно превратить в курс лекций без существенной адаптации. Проще всего для этого следовать порядку изложения, глава за главой: кроме двух исключений, которые указаны явно, все результаты, применяемые в доказательстве дальнейших утверждений, предшествуют им в тексте. Преподаватель может также пожелать разбить материал на лёгкий базовый курс в первом семестре, за которым последует более изощрённое продолжение во втором.

Предварительные знания, требуемые от читателей этой книги, как и обычно в текстах по теории графов, минимальны: основные представления о линейной алгебре ожидаются в § 1.9 и ещё раз в § 5.5, некоторые топологические факты о евклидовой плоскости и трёхмерном пространстве применяются в главе 4, а знакомство с элементарной теорий вероятности поможет легче понять главу 11. (Однако даже в ней формально требуется лишь знание основных определений: вся аппаратура теории вероятностей разрабатывается в тексте.) Есть два раздела теории графов, которые я нахожу захватывающими и важными, особенно в нашем контексте чистой математики, но которые в книге недостаточно или вовсе не раскрыты: это алгебраическая теория графов и бесконечные графы.

Каждую главу завершает раздел с упражнениями, а также библиографические и исторические комментарии. Многие из упражнений были отобраны в дополнение к основному тексту книги: они проясняют введённые понятия, показывают, как новые инварианты связаны с прежними, или же позволяют понять, в каком смысле результаты из текста главы являются лучшими из возможных. Особенно лёгкие упражнения помечены знаком $^{-}$, наиболее же хитроумные помечены знаком $^{+}$. Задача комментариев — указать читателю дальнейшее направление чтения, в особенности познакомить с монографиями или обзорными статьями по теме главы. Также в них содержатся исторические и иные примечания к материалу текста.

Конец доказательства помечается символом □. Если он даётся сразу после формулировки, это означает, что доказательство очевидно из всего ранее сказанного, — поправьте меня, если я ошибаюсь! Имеются также более глубокие теоремы, которые сформулированы в качестве дополнительной информации, без доказательства: их можно отличить по отсутствию как текста доказательства, так и знака □.

Почти каждая книга содержит ошибки, и эта не является исключением. Я предпринимаю попытку сообщать в сети о всех исправлениях, которые окажутся необходимыми. Исправления к последней англоязычной редакции доступны по ссылке:

`https://diestel-graph-theory.com/GrTh5_corrections.pdf`

Прошу вас сообщать мне обо всех найденных ошибках.

Лишь малая часть учебника может быть истинно оригинальной: даже стиль и изложение будут неизбежно опираться на прежние образцы. Наиболее повлияла на меня, несомненно, классическая книга по теории графов Боллобаша: именно по ней я впервые сам изучал науку. Всякий, кто хорошо знаком с этим текстом, легко увидит здесь его влияние, несмотря на все различия в содержании и изложении.

Я хотел бы поблагодарить всех, кто столь щедро поделился своим временем, знаниями и советами в работе над этой книгой. Особенно поспособствовали её созданию следующие люди:

Н. Алон, Г. Брайтвелл, Р. Джиллетт, Р. Халин, М. Хинц, А. Хак, И. Лидер, Т. Лучак, В. Мадер, В. Рёдль, А. Д. Скотт, П. Д. Сеймур, Г. Симони, М. Шковьера, Р. Томас, К. Томассен и П. Вальтр.

Также я особенно благодарю Томми Р. Йенсена, который научил меня многому о раскрасках и всему, что мне известно о k-потоках, а также вложил бесконечно много терпения и энергии при вычитывании оригинального немецкого текста.

Март 1997 *Р. Д.*

О втором издании[1]

Я весьма рад тому, что это добавление приходится писать столь скоро после выхода книги летом 1997 года. Особенно приятно узнавать, что люди постепенно начинают всё чаще не только читать эту книгу для себя, но и преподавать по ней; такова и была моя цель, когда я её писал, и с этим были связаны все мои мучительные размышления о наилучшем изложении материала, которое в противном случае меня бы вовсе не смущало.

Главных изменений два. Заключительная глава, посвящённая минорам графов, теперь содержит полное доказательство одного из важнейших результатов в теории Робертсона—Сеймура — их теоремы о том, что исключение графа в качестве минора ограничивает древесную ширину в том и только в том случае, когда этот граф планарен. Этого короткого доказательства не существовало, когда я писал первое издание, и именно поэтому я включил лучшее, что мог, — короткое доказательство аналогичного результата для путевой ширины. Теперь эта теорема исключена из главы 12. Ещё одна добавка в этой главе заключается в том, что теперь теорема двойственности для древесной ширины, теорема 12.4.3, дана с (коротким) доказательством.

Второе существенное изменение — ко всем упражнениям появились указания. Эту работу проделал в основном Томми Йенсен, и я благодарен ему за время, проведённое над проектом. Цель

[1] Указанное издание прежде переводилось на русский язык: *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002. — *Прим. перев.*

этих указаний — помочь тем, кто пользуется книгой, чтобы самостоятельно изучать теорию графов, но не испортить им всё удовольствие. И упражнения, и указания по-прежнему годятся для использования на занятиях.

Помимо этого, внесён ряд добавок. Наиболее заметны формальное знакомство с деревьями поиска в глубину в § 1.5 (что позволило несколько упростить некоторые дальнейшие доказательства) и новое изобретательное доказательство теоремы Менгера, данное Бёме, Герингом и Харантом (и прежде не публиковавшееся).

Наконец, повсюду встречаются мелкие упрощения и прояснения рассуждений, которые я придумал, преподавая по книге, или же которые предложили мне другие. Всем им выношу особую благодарность.

Сайт книги переехал вместе со мной по адресу:

`https://diestel-graph-theory.com/`

Я надеюсь, что он прослужит ещё долго.

И ещё раз спасибо всем, кто способствовал выходу этого второго издания, поделившись своими мыслями о первом, — жду дальнейших комментариев!

Декабрь 1999 *Р. Д.*

О третьем издании

Несомненно, эта книга подросла. Удаётся ли ей всё так же «концентрироваться на самом главном», как я надеялся, готовя предисловие к первому изданию почти восемь лет тому назад?

Полагаю, что да, и даже лучше, чем когда-либо прежде. Так откуда же взялось увеличение в объёме? Часть ответа состоит в том, что я всё ещё следую своей двойственной цели — спрятать под одной обложкой две вещи сразу:

- надёжное первое введение в теорию графов, подходящее и для самостоятельного изучения, и для чтения курса;
- продвинутый текст, глубоко раскрывающий важнейшие темы.

Для обеих целей был добавлен новый материал. Часть его покрывает новые темы, которые можно включать или опускать в зависимости от желания. В качестве одного из примеров на вводном уровне укажу новый раздел об упаковке и покрытии с использованием теоремы Эрдёша—Позы или добавление теоремы о стабильном паросочетании в главу о паросочетаниях. На продвинутом уровне укажу структурную теорему Робертсона—Сеймура для графов без фиксированного минора: результат этот формулируется за пару строк, но литература всё чаще на него опирается, вследствие чего мне показалось разумным предоставить легко доступный источник. Ещё одно добавление, опять же в главе о минорах, — это «теорема Куратовского для высших поверхностей» — доказательство, иллюстрирующее взаимосвязь между теорией миноров графов и топологией поверхностей лучше, чем было возможно прежде. Доказательство дополнено приложением о поверхностях, в котором излагаются необходимые базовые сведения и несколько проясняется доказательство теоремы о минорах графов.

Изменений, затрагивающих ранее имевшийся материал, мало, за исключением непрестанных точечных корректировок с целью скорее улучшить и отшлифовать, нежели изменить. Я осознаю, что, поскольку книгу всё чаще используют для преподавания, есть некоторый запрос на стабильность. Многие из исправлений стали результатом щедрых отзывов, полученных мной от пользующихся книгой коллег, и я очень благодарен за их помощь и советы.

Имеются и локальные добавления. Большинство развились из моих собственных заметок, нацарапанных на полях, когда я готовился преподавать по книге. Обычно они дополняют важные, но техничные доказательства, если мне казалось, что их существенные идеи теряются в лабиринте формальностей. К примеру, доказательство теоремы Эрдёша—Стоуна теперь получило неформальное послесловие на тему того, как именно в нём применяется лемма о регулярности. В отличие от формального доказательства, обсуждение начинается с основной идеи и в итоге приходит к выводу, как нужно задавать параметры, в формальном доказательстве указанные в самом начале. Аналогично появилось обсуждение, раскрывающее идеи в доказательстве теоремы о совершенных графах. Однако во всех этих случаях формальное доказательство оставалось фактически нетронутым.

Единственное существенное изменение в старом материале заключается в том, что прежняя теорема 8.1.1 (о том, что cr^2n рёбер вынуждают TK^r), на первый взгляд, лишилась своего изящного (и длинного) доказательства. Прежде оно служило удобным поводом разъяснить ряд методов экстремальной теории разреженных графов. Эти методы переехали в главу о связности, где теперь живут под крышей данного Томасом и Волланом нового доказательства того, что $8kn$ рёбер делают $2k$-связный граф k-соединённым. Так что они никуда не делись, даже сконцентрировались и лишь показывают себя в новом обличье. Вследствие этих перемен две прежние главы, посвящённые экстремальным теориям плотных и разреженных графов, удалось объединить, назвав получившуюся главу логичным именем: *Экстремальная теория графов*.

Наконец, появилась абсолютно новая глава о бесконечных графах. Когда теория графов только зарождалась как математическая дисциплина, рассматривать конечные графы наравне с бесконечными казалось само собой разумеющимся. В последние годы тренд переменился, что для меня является печальным исходом: бесконечные графы продолжают оставаться естественным и часто необходимым мостом, связывающим графы с иными разделами математики, и сами по себе они заслуживают интереса. Одна их особенность — в том, что доказательства для них нередко оказываются по природе конструктивнее и алгоритмичнее, чем для их конечных аналогов. Бесконечная версия теоремы Менгера в § 8.4 служит типичным примером: она позволяет алгоритмически взглянуть на проблемы связности в сетях, которые остаются за кадром в изящной индукции из конечной теоремы в § 3.3.

Я вновь благодарю всех читателей и коллег, чьи комментарии способствовали улучшению книги. Особенно я благодарен Имре Лидеру за щедрые комментарии обо всей главе про бесконечные графы; моему семинару по теории графов, особенно Лилан Маттиесен и Филиппу Шпрюсселю за то, что они обкатали главу и решили все упражнения в ней (их рецензию пережило лишь восемьдесят); Агелосу Георгакопулосу за вычитывание текста повсюду; Мелани Вин Минт за сборку указателя с нуля и существенное его расширение; наконец, Тиму Стеллдинджеру, который выхаживал кита со страницы 536, пока тот не смог наконец поднять своего динозавра.

Май 2005 *Р. Д.*

О четвёртом издании

В этом издании мало существенных добавлений нового материала, но много улучшений.

Как и в предыдущих новых изданиях, здесь бесчисленное количество небольших и малозаметных поправок, служащих цели прояснить некоторое рассуждение или понятие. Даже если они возникают по предложениям читателей, за которые я всегда благодарен, я всё равно пытаюсь пересказать подробности, которые кажутся мне изложенными сложнее, чем следовало бы. Они могут встречаться на базовом уровне: обратите внимание на определение минора в главе 1.

На более существенном уровне появились несколько новых и упрощённых доказательств классических результатов, что один раз позволило сократить уже сокращавшееся доказательство в половину его длины (и удвоить его красоту). Среди этих вновь добавленных результатов — теорема Холла, теорема о древесной упаковке, теоремы Татта о циклическом пространстве и о колесе, теорема Флейшнера о гамильтоновых циклах и пороговая теорема о рёберной вероятности, гарантирующей конкретный тип подграфа. Имеется и несколько подлинно новых теорем. Одна из них — изобретательное локальное степенное условие существования гамильтонова цикла, которое нашли Асратян и Хачатрян, откуда выводятся многие классические теоремы о гамильтоновости.

Есть разделы, в которых я слегка реорганизовал материал или же переписал текст. Обычно это именно те, что разрослись за три предыдущих издания, и это начало сказываться на их сбалансированности и связности. Я всё ещё стараюсь не просто предложить россыпь теорем и доказательств, но всюду, где возможно, дать представление о мире вокруг них в целом и поэтому пытаюсь сохранить исходную свежесть и последовательность.

И наконец, у книги появился свой специальный сайт, по адресу:

`http://diestel-graph-theory.com/`

Это потенциально открывает больше возможностей, чем традиционное бесплатное онлайн-издание и всё сокращающийся список опечаток. Если у вас есть идеи, которые вам хотелось бы увидеть вживую, сообщите мне.

Май 2010 *Р. Д.*

О пятом издании

Пятое издание книги снова оказалось массивной переработкой, подобно третьему.

Я переписал всю главу 12 о минорах графов, чтобы принять во внимание свежие результаты. Помимо множеств обновлений поменьше, появилось новое доказательство теоремы двойственности для древесной ширины, найденное Мазуа и прежде не публиковавшееся. Более фундаментален целый добавленный параграф о сплетениях. Это понятие, введённое Робертсоном и Сеймуром как чисто технический компонент их доказательства теоремы о минорах графов, оказался на поверку гораздо фундаментальнее: сплетения оказались новой парадигмой для поиска сильно связных частей графа. В отличие от прежних усилий по поиску подобных подструктур — скажем, сильно связных подграфов, миноров, топологических миноров — сплетения даже не пытаются указать в этой подструктуре вершины, рёбра или соединяющие пути, а описывают её косвенно, направляя на неё все разделения низкого порядка. Короче говоря, мы перестали спрашивать, *что* представляет из себя сильно связная часть графа, а удовлетворяемся знанием, *где* она расположена. Во многих приложениях требуется в точности это. Более того, такое более абстрактное представление о локальной высокой связности легко обобщается и за пределы теории графов. Это даёт всей теории о минорах новые приложения вне графов, и всё благодаря сплетениям. Я написал новый параграф о сплетениях, следуя этой современной перспективе.

Глава 2 получила заново написанный параграф о древесной упаковке и покрытии. Я написал его, чтобы извлечь максимум из прекрасной новой объединяющей теоремы, охватывающей оба аспекта разом: *теоремы о покрытии и упаковке,* доказанной Боулером и Кармесином. Хотя их исходный результат был установлен, строго говоря, для матроидов, у графового варианта имеется короткое и замкнутое доказательство. Оно дано в § 2.4 и также прежде не публиковалось.

Глава 8, посвящённая бесконечным графам, теперь глубже разбирает топологическую сторону локально конечных графов. В ней даётся контекст для понятия компактификации графа G по Фрейденталю, поскольку теперь оно описывается ещё и как обратный предел конечных миноров стяжения G. Читателям, владеющим теорией групп, этот материал покажется знакомым.

Как всегда, повсюду есть бесчисленные крошечные улучшения в тексте, доказательствах и упражнениях. Благодарю всех, кто предлагал их.

Наконец, я внёс две небольшие поправки, чтобы сохранить осмысленность упражнений на занятиях в дни мгновенного доступа в интернет. Во-первых, было удалено приложение с указаниями, оно оставлено лишь в англоязычном издании для преподавателей, чтобы они самостоятельно решали, какие указания давать, а какие нет. Кроме того, в упражнениях, призывающих доказать теорему, названную в честь человека, более не упоминается его имя, чтобы не было возможности просто найти доказательство в интернете.

Июль 2016 *Р. Д.*