

Предисловие

Фигурные числа, так же как и большинство классов специальных чисел, имеют долгую и богатую историю. Это понятие было введено в пифагорейской школе (VI век до н. э.) в результате попытки связать геометрию с арифметикой. Пифагорейцы, следуя своему кредо «всё является числом», представляли любое положительное целое число в виде набора точек на плоскости.

Фигурное число — это число, которое можно представить правильной дискретной геометрической моделью из точек. Это может быть, скажем, *многоугольное*, *многогранное* или *политопное число*, если эти точки образуют правильный многоугольник, правильный многогранник или правильный политоп соответственно. Фигурные числа могут также образовывать и другие формы, такие как центрированные многоугольники, *L-образные*, трёхмерные (и многомерные) тела и т. д.

В частности, многоугольные числа обобщают числа, которые можно представить в виде треугольника (*треугольные числа*) или квадрата (*квадратные числа*), вплоть до *m-угольных* для любого целого числа $m \geq 3$.

Помимо классических многоугольных чисел, на плоскости можно построить *центрированные многоугольные числа*. Каждое центрированное многоугольное число образовано центральной точкой, окруженной многоугольными слоями с постоянным числом сторон. Каждая из сторон многоугольного слоя содержит на одну точку больше, чем любая строка предыдущего слоя.

В главе 1 мы рассмотрим эти и другие плоские фигурные числа со множеством свойств, взаимосвязей и взаимозависимостей.

Располагая точки в определённом порядке не на плоскости, а в пространстве, мы получим *пространственные фигурные числа*. Наиболее известные из них — это *пирамидальные числа*, соответствующие треугольным, четырёхугольным и вообще произвольным *m-угольным* пирамидам. Они задаются как суммы соответствующих многоугольных чисел. Если физически складывать шарики таким образом, то устойчивыми будут только треугольные и четырёхугольные пирамиды, и древние греки рассматривали только соответствующие два класса пространственных фигурных чисел. *Кубические числа* соответствуют кубам, построенным из шаров. *Октаэдральные*, *додекаэдральные* и *икосаэдральные числа* соответствуют трём оставшимся платоновым телам.

Часто рассматривают *центрированные пространственные фигурные числа*. Они строятся так же, как и центрированные многоугольные числа. Рассматриваются также и числа, которые могут быть получены путём сложения или вычитания пирамидальных чисел меньшего размера. Это соответствует усечению соответствующего многогранника или помещению пирамиды на грань, как при построении звёздчатого многогранника.

Эти и другие классы пространственных фигурных чисел рассматриваются в главе 2.

Аналогично можно построить *многомерные фигурные числа*, т. е. фигурные числа высшей размерности k . В размерности 4 наиболее известны *пентагонные числа*, являющиеся четырёхмерным аналогом треугольных и тетраэдральных чисел и соответствующие четырёхмерным симплексам, и *биквадратные числа*, которые служат четырёхмерным аналогом квадратных и кубических чисел.

Элементы теории многомерных фигурных чисел приведены в главе 3.

Теория фигурных чисел не принадлежит к центральным областям математики, но красота этих чисел притягивает внимание многих учёных на протяжении тысяч лет. Список (неполный) знаменитых учёных, работавших в этой области, включает в себя Пифагора Самосского (ок. 582 до н. э. – ок. 507 до н. э.), Гипсикла Александрийского (190 до н. э. – 120 до н. э.), Плутарха Херонейского (ок. 46 – ок. 122), Никомаха Герасского (ок. 60 – ок. 120), Теона Смирнского (70–135), Диофанта Александрийского (ок. 210 – ок. 290), Леонардо Пизанского, также известного как Леонардо Фибоначчи (ок. 1170 – ок. 1250), Михаэля Штифеля (1487–1567), Джероламо Кардано (1501–1576), Клода Гаспара Баше де Мезирика (1581–1638), Рене Декарта (1596–1650), Пьера Ферма (1601–1665), Джона Пелля (1611–1685), Блеза Паскаля (1623–1662), Леонарда Эйлера (1707–1783), Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), Адриена-Мари Лежандра (1752–1833), Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), Огюстена Луи Коши (1789–1857), Карла Густава Якоба Якоби (1804–1851), Вацлава Франтишека Серпинского (1882–1969), Барнса Уоллеса (1887–1979).

Более того, многие математические факты тесно связаны с фигурными числами, и множество известных теорем можно сформулировать в терминах этих чисел. В частности, фигурные числа связаны с многими другими классами целых чисел, такими как биномиальные коэффициенты, совершенные числа, числа Мерсенна, Ферма, Фибоначчи, Люка и т. д.

Об этих и других классах целых чисел, возникающих в теории чисел и связанных с фигурными числами, рассказано в главе 4.

Фигурные числа ещё в древности изучались пифагорейцами, но в настоящее время они интересны в основном в связи с *теоремой Ферма о многоугольных числах*. В 1636 г. Ферма предположил, что каждое число можно представить в виде суммы не более чем m штук m -угольных чисел. В письме к Мерсенну, он утверждал, что знает доказательство этого результата, но это доказательство так и не было найдено. Лагранж (1770) доказал теорему для квадратных чисел, а Гаусс в 1796 году — для треугольных. В 1813 году Коши доказал утверждение в полном объёме.

В главе 5 мы даём полное и подробное доказательство теоремы Ферма о многоугольных числах и связанных с ней результатов в полной общности, так как части этого доказательства разбросаны по многим работам, зачастую труднодоступным.

В небольшой главе 6 мы собрали некоторые отдельные замечательные числа, связанные с фигурными.

Глава 7 состоит из упражнений и советов по их решению.

Наконец, в обширном предметном указателе перечислены все классы специальных чисел, упомянутые в тексте.

Основная цель этой книги — дать систематическое и полное изложение теории фигурных чисел с подробными доказательствами. Мы стремились представить собранный материал в ясной и единообразной форме.

Книга предназначена для преподавателей, школьников и студентов, интересующихся теорией чисел, общей алгеброй, криптографией и смежными областями, а также для широкой аудитории любителей математики.

Книга организована таким образом, что её можно использовать в качестве исходного материала для индивидуальной научной работы студентов. Она даёт возможность подобрать для студента задание, подходящее по трудности, по степени строгости доказательств, а также требующее (или нет) самостоятельного поиска информации. Материал книги уже использовался для многих курсовых и дипломных работ. Главы 1, 2 и 3 доступны студентам и вообще массовому читателю, интересующемуся математикой, но главы 2 и 3 немного более трудные. Глава 4 и особенно глава 5 включают в себя более сложный материал и требуют некоторой математической культуры.