[Ro51] *Rogers C. A.* The closest packing of convex two-dimensional domains // Acta Math. 1951. V. 86. P. 309—321.

[We80] *Wegner G.* Zu einem ebenen Überdeckungsproblem // Studia Sci. Math. Hung. 1980. V. 15. P. 287—297.

§1.5. Упаковка полукругов и роль симметрии

Одной из основных тем в теории упаковок и покрытий является роль симметрии. Верно ли, например, что при некоторых достаточно общих условиях плотность упаковки когруэнтных копий выпуклого тела C на плоскости не может превышать максимальную плотность периодической упаковки? Как мы видели ранее, $\delta(C) = \delta_L(C)$ для любого центрально-симметричного плоского выпуклого тела C (см. заметку Л. Фейеш-Тота [FeT50]). Безусловно, мы не можем ожидать, что такое же утверждение будет верно, если отказаться от центральной симметричности; это подтверждается приведёнными выше примерами замощений конгруэнтными треугольниками. Однако даже в этом случае мы можем надеяться, что константа упаковки достигается на периодической упаковке или, возможно, даже на размещении, являющемся объединением двух решётчатых упаковок.

Гипотеза 1 (Л. Фейеш-Тот, не опубликовано). *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольное плоское выпуклое тело с k-кратной поворотной симметрией для некоторого нечётного целого k. Тогда константа упаковки тела $\mathscr{C}$ достигается на размещении, являющемся объединением двух решётчатых упаковок.*

К сожалению, у нас нет общих методов вычисления $\delta(C)$ в случае, когда C не центрально-симметрично. Даже следующий удручающе простой вопрос пока открыт.

Проблема 2 (Л. Фейеш-Тот [FeT71]). *Определить константу упаковки полукругов.*

На первый взгляд может показаться, что плотнейшую упаковку можно получить, разместив пары полукругов так, чтобы они образовали круги, а затем разместив получившиеся диски в плотнейшей решётчатой упаковке. Однако Грёмер и Хеппеш [GrH75] нашли пример упаковки полукругов с плотностью

$$\frac{\pi}{\sqrt{3} + 5\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}} = 0{,}935\ldots > \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0{,}906,$$

которая, как предполагается, является оптимальной. (См. также [Mö91], [Rö92].)

Кроме того, они доказали следующую общую теорему: всякое центрально-симметричное плоское выпуклое тело C, отличное от шестиугольника и параллелограмма, может быть разбито на две (конгруэнтные) части C_1 и C_2 прямой, проходящей через его центр таким образом, что $\delta(C_1) > \delta(C)$. Они также установили аналогичный результат для покрытий.

Гипотеза 3 (Грёмер—Хеппеш [GrH75]). *Пусть C — строго выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$. Тогда можно получить два разбиения*

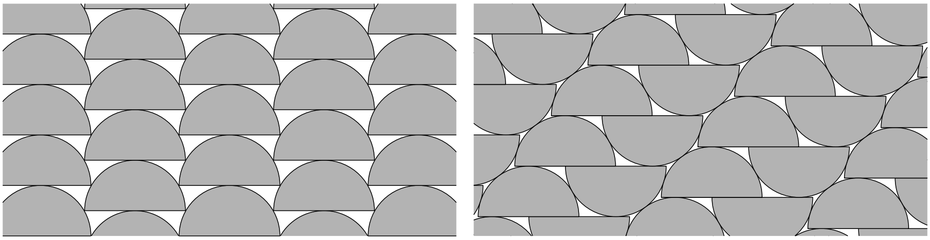

Рис. 1.7. Упаковки полукругов

тела C, $C_1 \cup C_2$ и $C_1' \cup C_2'$, каждое с помощью одной гиперплоскости, проходящей через центр тела C, для которых будут выполнены неравенства

$$\delta(C_1) > \delta(C) \quad \textit{и} \quad \theta(C_1') < \theta(C).$$

Вернёмся к исходному вопросу. Если мы отбросим условие выпуклости тела C, то не сможем больше ожидать, что константа упаковки его конгруэнтных копий реализуется периодическим размещением. С помощью искусной модификации так называемых плиток Ванга (см., например, статью Гарднера [Ga77]) Шмитт [Sch91] построил связное множество C на плоскости, которое является объединением двух выпуклых тел и обладает следующим свойством: ни одна периодическая упаковка его конгруэнтных копий не имеет плотность $\delta(C)$.

Ограничиваясь упаковками сдвигов, мы имеем больше шансов получить какие-нибудь положительные результаты.

Проблема 4 (Грюнбаум—Шепард [GrS87]). *Пусть C — невыпуклое тело на плоскости, и пусть $\delta_T(C) = 1$, т. е. плоскость можно замостить сдвигами тела C. Верно ли, что $\delta_L(C) = 1$?*

На самом деле мы даже не знаем, следует ли из равенства $\delta_T(C) = 1$ существование периодического замощения плоскости сдвигами тела C.

Согласно результату Б. А. Венкова [Ve54], переоткрытому Макмюлленом [McM80], для *выпуклых* тел C ответ на вопрос в проблеме 4 положителен в любой размерности.

Гипотеза 5 (Л. Фейеш-Тот [FeT85]). *Если C — связное множество, являющееся объединением двух выпуклых тел, то*

$$\delta_T(C) = \delta_L(C).$$

Известно, что эта гипотеза верна для выпуклых тел C (см. работы Л. Фейеш-Тота [FeT50] и Роджерса [Ro51]) и для «ограниченно полувыпуклых» тел C (это немного более слабое свойство, введённое Л. Фейеш-Тотом [FeT85]). Им же [FeT86] это предположение было подтверждено в ещё одном случае: если C представляет собой объединение двух равных кругов. Этот результат был обобщён Хеппешем [He01] для более сложных областей, ограниченных дугами окружностей, и Кертесом [Ke87] — для объединения двух сдвигов любого плоского выпуклого тела. С другой стороны, усовершенствовав конструкцию А. Бездека и Кертеса [BeK87], Хеппеш [He87], [He90] нашёл звёздчатое множество C на плоскости, являющееся объединением трёх выпуклых тел, для которого $\delta_T(C) \neq \delta_L(C)$. В этом смысле сформулированная выше гипотеза, если она верна, будет наилучшим возможным результатом.

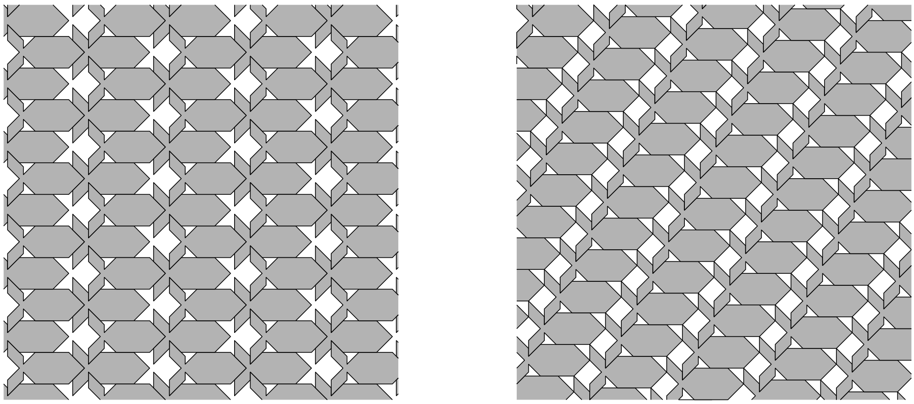

Рис. 1.8. Пример множества с большей константой упаковки сдвигов, чем константы решётчатой упаковки

Очень простое центрально-симметричное звёздчатое множество C, которое является объединением двух выпуклых тел и удовлетворяет условию $\theta_T(C) \neq \theta_L(C)$, было найдено Лумисом [Lo83]: это крест, который получается присоединением четырёх прямоугольных «рукавов» размера 2×1 к каждой из сторон единичного квадрата. Константа *покрытия* сдвигами такой фигуры удовлетворяет равенству $\theta_T(C) = 9/8$, в то время как $\theta_L(C) = 9/7$. Похожие примеры были сконструированы Бамбой и др. [BaDH77], а в бóльших размерностях — Сабо [Sz83] и Стайном [St86].

Мы завершаем этот параграф ещё двумя задачами о множествах, являющихся объединением конечного числа кругов с равными радиусами.

Гипотеза 6 (Л. Фейеш-Тот [FeT86]). *Пусть C — объединение n кругов единичного радиуса, центры которых лежат на одной прямой, причём расстояния между соседними центрами попарно равны и не превосходят 2. Тогда*

$$\delta_T(C) = \delta_L(C).$$

Л. Фейеш-Тот [FeT86] доказал это предположение для $n = 2$. Он также поставил следующую интересную задачу. Пусть $d_T(n) := \sup \delta_T(C)$, где супремум берётся по всем областям C, которые могут быть получены как объединение n единичных кругов. Он предположил, что при $n \leqslant 5$ максимум достигается на конфигурациях, в которых центры соседних кругов размещены на одной прямой на равных промежутках друг от друга. Однако, как и в «колбасной катастрофе», обсуждаемой в § 1.11, ситуация радикально меняется, как только мы переходим от $n = 5$ к 6. Оказывается, в этот момент появляются более хитрые конструкции, в которых бóльшая часть кругов образует экономное покрытие правильного шестиугольника, но есть и дополнительные круги вдоль границы, создающие «сглаживающий» эффект по мере роста n.

Гипотеза 7 (Л. Фейеш-Тот [FeT86]; Пах). *Пусть $d(n) := \sup \delta(C)$, где супремум берётся по всем множествам C, которые могут быть получены объединением n единичных кругов. Тогда*

$$d(n) = 1 - \frac{4\sqrt{3} - 2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Упаковки, на которых достигается эта оценка, являются упаковками сдвигов. Поэтому если эта гипотеза верна, то, очевидно, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - d(n)) = \lim_{n\to\infty} n(1 - d_T(n)).$$

Литература к § 1.5

[BaDH77] *Bambah R. P., Dumir V. C., Hans-Gill R. J.* Covering by star domains // Indian J. Pure Appl. Math. 1977. V. 8. P. 344—350.

[BeK87] *Bezdek A., Kertész G.* Counter-examples to a packing problem of L. Fejes Tóth // Intuitive Geometry (Siófok, 1985) / K. Böröczky et al., eds. North-Holland, 1987. P. 29—36. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; V. 48).

[FeT86] *Fejes Tóth L.* Densest packing of translates of the union of two circles // Discrete Comput. Geom. 1986. V. 1. P. 307—314.

[FeT85] *Fejes Tóth L.* Densest packing of translates of a domain // Acta Math. Hungar. 1985. V. 45. P. 437—440.

[FeT71] *Fejes Tóth L.* The densest packing of lenses in the plane (in Hungarian) // Mat. Lapok. 1971. V. 22. P. 209—213.

[FeT50] *Fejes Tóth L.* Some packing and covering theorems // Acta Sci. Math. Szeged. 1950. V. 12 A. P. 62—67.

[Ga77] *Gardner M.* Mathematical Games: Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles // Scientific Amer. 1977. V. 236/1. P. 110—121.

[GrH75] *Groemer H., Heppes A.* Packing and covering properties of split disks // Studia Sci. Math. Hungar. 1975. V. 10. P. 185—189.

[GrS87] *Grünbaum B., Shephard G. C.* Tilings and Patterns. W. H. Freeman and Co., 1987.

[He01] *Heppes A.* Packing of rounded domains on a sphere of constant curvature // Acta Math. Hungar. 2001. V. 91. P. 245—252.

[He90] *Heppes A.* On the packing density of translates of a domain // Studia Sci. Math. Hungar. 1990. V. 25. P. 117—120.

[He87] *Heppes A.* On the density of translates of a domain // Közl. MTA Számítástech. Automat. Kutató Int. Budapest. 1987. V. 36. P. 93—97.

[Ke87] *Kertész G.* Packing with translates of a special domain // Tagungsberichte Math. Forschungsinstitut Oberwolfach. Koll. Diskrete Geometrie, 1987.