

Предисловие

Очередная книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена геометрическим задачам о площадях. К сожалению, в школьном курсе геометрии большей частью рассматриваются задачи, для решения которых надо оперировать теми или иными готовыми формулами для вычисления площадей конкретных фигур. Приучаясь работать с формулами, школьники подчас не видят иных способов решения, а столкнувшись с задачей, где формулы не помогают, заходят в тупик. Материал предлагаемой книжки делает попытку восполнить этот пробел. Для решения предлагаемых задач достаточно уметь вычислять площадь прямоугольника и квадрата (соответствующие формулы есть в школьных учебниках для 5 класса).

Огромное влияние на автора этой книги оказало творчество замечательного математика, автора большого количества задач для школьников Вячеслава Викторовича Произволова. В эту книжку включено много задач этого автора, и это не случайно. Большинство задач В. В. Произволова имеют яркие формулировки и красивые решения. Проведение занятий из этой книжки позволит познакомиться с ними как учителям математики, так и учащимся. Хочется всячески пропагандировать задачи этого автора, и не только в рамках заявленной темы (см., например, статью [5] и книги [12, 20] в списке литературы).

В школьном курсе геометрии систематическое изучение площадей отнесено в 8 класс (по некоторым программам — в 9 класс). Вместе с тем представление о площадях фигур дети получают уже в начальной школе. Для закрепления этих представлений на наглядном и интуитивном уровнях, а также для пропедевтики систематического изучения площадей служат первые три занятия, представленные в этой книжке. Так как эти занятия предназначены для младших школьников, ещё не знакомых с формулами площадей, то основным содержанием этих занятий являются задачи, на примере которых показано, как обойтись без применения

формул. Остальные занятия призваны сопровождать изучение школьного курса. Для решения задач из этих занятий могут потребоваться какие-то сведения из базового курса геометрии, не относящиеся к площадям.

Отдельно отметим, что задачи, связанные с площадями фигур, интересовали математиков с древности. Несколько задач, представленных в данном издании, содержатся ещё в работах Архимеда, Гиппократы, Евклида.

Как обычно, в материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе и комментарии в начале занятия, поясняющие основное содержание и цели занятия).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеют смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

В приложении, размещённом в конце книжки, содержатся теоретические сведения, идейно дополняющие основной материал: формальное определение площади, теорема о площади, о связи равновеликости и равноставленности фигур.

Краткое содержание занятий

Занятие 1. Площади на клетчатой бумаге. Вычисление площадей некоторых многоугольников, изображённых на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки, построение таких фигур, имеющих заданную площадь. Сравнение площади фигур, изображённых на клетчатой бумаге, без помощи вычислений.

Ориентировано на учащихся 5–6 классов.

Занятие 2. Соотношение площадей простейших фигур. Рассматривается соотношение площадей прямоугольников, имеющих общую сторону, и параллелограммов с общей стороной и высотой. Устанавливается связь между площадями треугольника и параллелограмма, имеющих общую сторону и высоту.

Ориентировано на учащихся 6–7 классов.

Занятие 3. Середины сторон треугольника и четырёхугольника. Рассматриваются задачи, решения которых опираются на два важных факта: 1) средняя линия треугольника отсекает четверть его площади; 2) медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади. Эти факты обосновываются во вступительной части с опорой на материал предыдущего занятия.

Ориентировано на учащихся 6–7 классов.

Занятие 4. Отношение площадей и равновеликость. Предлагаемый материал предполагает развитие и закрепление идей, которые обсуждались на занятиях 2 и 3. По сравнению с задачами этих занятий здесь рассматриваются задачи с более сложными конструкциями, решение которых, в частности, требует комбинирования уже известных идей. Кроме того, в отличие от предыдущих занятий, все утверждения будут доказываться строго.

Ориентировано на учащихся 7–8 классов.

Занятие 5. Перекладывание, объединение и пересечение фигур. Рассматриваются ещё более сложные конструкции, чем на предыдущих занятиях. На них ещё раз отрабатывается приём добавления площадей равновеликих фигур. Появляются новые идеи решения: перекладывание частей (перегруппировка площадей), формула «включения и исключения» в применении к площадям.

Ориентировано на учащихся 8 класса.

Занятие 6. Круг и его части. Здесь собраны задачи, в которых ранее рассмотренные приёмы (разбиение фигур на равные части, перекладывание частей, их добавление и перегруппировка, объединение и пересечение) использованы для работы с площадями некоторых криволинейных фигур. Обосновывается и используется тот факт, что отношение площадей кругов равно отношению квадратов их радиусов (диаметров).

Ориентировано на учащихся 8 класса.

Занятие 7. Движения. Сюда включены задачи, для решения которых можно эффективно использовать какие-то из видов движений на плоскости. При этом решения некоторых задач можно изложить без упоминания о движении на плоскости, а только на уровне дополнительных построений, которые по сути являются движениями. В отдельных случаях упоминание о движении уже содержится в условии задачи.

Ориентировано на учащихся 8–9 классов.

Занятие 8. Площади подобных треугольников и пропорциональность площадей. Рассматриваются задачи, для решения которых, как правило, используется отношение площадей подобных треугольников. Решение некоторых задач потребует также привлечения идей равносильности и пропорциональности площадей, которые отрабатывались на предыдущих занятиях. Доказывается важная лемма о площадях треугольников, на которые четырёхугольник разбивается диагоналями.

Ориентировано на учащихся 8–9 классов.

Занятие 9. Построения и геометрические места точек. Включены задачи на построение и на ГМТ, связанные с площадями. Идеи решения большинства задач уже встречались на предыдущих занятиях, но иная постановка задачи заставляет их опознать и обработать. Вместе с тем предложенный материал может служить для повторения и в какой-то степени для обобщения уже изученного.

Ориентировано на учащихся 8–9 классов.

По традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось). Отдельная благодарность — А. В. Шаповалову, чьи ценные замечания помогли значительно улучшить текст.