

## Предисловие

Дав руку мне, чтоб я не знал сомнений,  
И обернув ко мне спокойный лик,  
Он ввёл меня в таинственные сени...

Д. Алигьери, «Божественная комедия»

Казалось бы, доказательство *неравенств* должно мало чем отличаться от доказательства *тождеств*. И в тех и в других задачах, как правило, чётко видно, *что именно* нужно доказать, значит, ясна конечная цель, которой нужно достичь. Однако это сходство обманчиво. Всё дело в том, что тождество зачастую можно доказать с помощью *тождественных* преобразований, постепенно приводя его части ко всё более и более простому виду. В школьных учебниках в изобилии встречаются задачи с формулировкой «Упростите выражение». По сути эти задачи и являются доказательствами тождеств: мы упрощаем сложную левую часть до *равной ей* простой правой части.

Совершенно иначе дело обстоит с неравенствами. Несмотря на то, что, как и в тождествах, в неравенствах явно написано, к чему должно быть приведено сложное выражение из условия, *взять и привести* его к нужному виду часто бывает крайне тяжело. Связано это с тем, что преобразования, которые нужно совершить для такого приведения, *не являются тождественными*; они изменяют данные в условии выражения, причём заранее очень трудно бывает угадать, как нужно эти выражения изменять (причём неоднократно), чтобы привести их к требуемому виду. В тождествах всё же есть более-менее универсальные приёмы: формулы сокращённого умножения. В неравенствах ничего подобного нет. Именно в этом и заключается основная трудность при работе с ними: *нам необходимо совершать нетождественные преобразования, причём заранее непонятно, как именно нужно преобразовывать получающиеся выражения.*

Овладеть искусством совершать такие действия с неравенствами не просто, но возможно. Цель данной книги заключается в том, чтобы

помочь читателю этого добиться. Каждый пункт содержит в себе одну ключевую идею, позволяющую работать с теми или иными неравенствами. Начинается пункт с подробного объяснения этой идеи, а в случае, если идея достаточно сложна или применить её непросто, приводится развёрнутое решение красивой и сложной задачи, в которой эта идея наиболее ярко (по мнению автора) используется. Такая идея чётко формулируется, как правило, в виде некоторого «именного» утверждения (неравенство Коши, транснеравенство и т. д.), после чего предлагается небольшая подборка из 4–5 задач, которые решаются с её помощью. Задачи обычно взяты из олимпиад высокого уровня, включая Всероссийскую олимпиаду (Vse) и Международную олимпиаду (IMO). В конце книги приведены данные каждой такой задачи: на какой олимпиаде, в каком году и в каком классе она была предложена.

Как правило, задачи в каждом пункте расположены по возрастанию сложности. При этом практически в каждом пункте содержатся очень трудные задачи (например, предлагавшиеся на Международной математической олимпиаде). Сознавая, что решить эти задачи самостоятельно крайне тяжело, автор тем не менее считает очень полезным *длительное обдумывание* таких сложных задач, поскольку именно борьба с подобными задачами и последующий тщательный анализ их решений позволяют повысить свой уровень и научиться каким-то новым приёмам и соображениям.

Костяк данного задачника составляют неравенства, предлагавшиеся на следующих олимпиадах:

- Московская математическая олимпиада [ММО];
- Олимпиада им. Леонарда Эйлера [Euler];
- Всероссийская математическая олимпиада [Vse];
- Американская математическая олимпиада [USAMO];
- Тихоокеанская математическая олимпиада [APMO];
- Олимпиада «Туймаада» [Туу];
- Международная математическая олимпиада [IMO].

При написании данной книги автор активно использовал замечательные материалы И. В. Яковлева, которые размещены на сайте [www.mathus.ru](http://www.mathus.ru). Именно эти материалы, а также непосредственное общение с И. В. Яковлевым мотивировали автора к изучению олимпиадных неравенств и систематизации методов их доказательств.

Поскольку целью данной книги является подготовка именно к олимпиадным неравенствам, в главе 8 приводится полный список

всех задач с неравенствами на Московской математической олимпиаде, Всероссийской олимпиаде, олимпиаде «Туймаада» и Международной математической олимпиаде. В задачах каждой олимпиады есть своя специфика, почувствовать которую можно, лишь прорешав достаточно большое количество задач именно с этой олимпиады.

Наконец, в конце книги приведены решения наиболее, сложных и интересных по мнению автора задач. Очень важно при анализе задач попытаться разобраться, *почему* то или иное соображение работает именно в данной задаче и почему его не удалось применить здесь при самостоятельном решении. Проводя подобный самоанализ, читатель существенно повысит свой уровень в решении олимпиадных неравенств.

Отличительной особенностью данной книги является её *краткость и ёмкость*. Все приёмы, описанный в ней, а также способы их применить основаны на *реальных задачах*, предлагавшихся на олимпиадах высокого уровня. Не претендуя на полноту описания методов работы с неравенствами, автор всё же надеется, что многие приведённые в книге приёмы и соображения станут для читателя новыми и помогут ему успешно справиться с олимпиадными неравенствами в боевых условиях.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность И. В. Яковлеву, общение с которым побудило его написать данную книгу, а также ученикам 8-х и 10-х классов лицея «Вторая школа», на которых она была апробирована в 2017 г. в Летней математической школе в городе Иннополисе.