

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Вместо предисловия ко второму изданию</b>	<b>10</b>
<b>Введение</b>	<b>13</b>
<b>Глава I. Групповая и гамильтонова структуры динамики жидкости</b>	<b>17</b>
§ 1. Группы симметрий твердого тела и идеальной жидкости . . . . .	17
§ 2. Группы Ли, алгебры Ли и присоединенное представление . . . . .	19
§ 3. Коприсоединенное представление группы Ли . . . . .	26
3.1. Определение коприсоединенного представления (26). 3.2. Сопряженное пространство к пространству плоских бездивергентных векторных полей (27). 3.3. Алгебра Ли бездивергентных векторных полей на многообразии произвольной размерности и ее сопряженное пространство (29).	
§ 4. Левоинвариантные метрики и твердое тело для произвольной группы . . . . .	30
§ 5. Приложения к гидродинамике . . . . .	34
§ 6. Гамильтонова структура уравнений Эйлера . . . . .	40
§ 7. Идеальная гидродинамика на римановых многообразиях . . . . .	46
7.1. Гидродинамическое уравнение Эйлера на многообразиях (46). 7.2. Сопряженные пространства алгебр Ли бездивергентных полей (47). 7.3. Оператор инерции $n$ -мерной жидкости (52).	
§ 8. Доказательства теорем об алгебре Ли бездивергентных векторных полей и сопряженном к ней пространстве . . . . .	54
§ 9. Законы сохранения в многомерной гидродинамике . . . . .	58
§ 10. Групповая структура идеальной магнитной гидродинамики . . . . .	65
10.1. Уравнения магнитной гидродинамики и уравнения Кирхгофа (65). 10.2. Магнитное расширение группы Ли (66). 10.3. Гамильтонова формулировка уравнений Кирхгофа и магнитной гидродинамики (69).	
§ 11. Конечномерная аппроксимация уравнения Эйлера . . . . .	71
11.1. Аппроксимации вихревыми системами на плоскости (72). 11.2. Неинтегрируемость систем не менее четырех точечных вихрей (74). 11.3. Гамильтоновы аппроксимации вихрей в трехмерном пространстве (75). 11.4. Конечномерные аппроксимации групп диффеоморфизмов (75).	
§ 12. Уравнение Навье–Стокса с групповой точки зрения . . . . .	78
<b>Глава II. Топология стационарных течений жидкости</b>	<b>84</b>
§ 1. Классификация трехмерных стационарных течений . . . . .	84
1.1. Стационарные решения уравнения Эйлера и функции Бернулли (84). 1.2. Структурные теоремы (88).	

§ 2.	Вариационные принципы для стационарных решений и приложения к двумерным течениям . . . . .	91
	2.1. Минимизация энергии (91). 2.2. Задача Дирихле и стационарные течения (93). 2.3. Связь двух вариационных принципов (96). 2.4. Полугрупповой вариационный принцип для двумерных стационарных течений (97).	
§ 3.	Устойчивость стационарных точек на алгебрах Ли . . . . .	100
§ 4.	Устойчивость двумерных течений жидкости . . . . .	104
	4.1. Критерии устойчивости для стационарных течений (105). 4.2. Блуждающие решения уравнения Эйлера (113).	
§ 5.	Линейное и экспоненциальное растяжение частиц и быстро осциллирующие возмущения . . . . .	115
	5.1. Линеаризованное и укороченное уравнения Эйлера (115). 5.2. Переменные действие-угол (116). 5.3. Спектр укороченного уравнения (117). 5.4. Теорема Сквайра для сдвиговых течений (118). 5.5. Стационарные течения с экспоненциальным растяжением частиц (120). 5.6. Исследование линеаризованного уравнения Эйлера (121). 5.7. Устойчивы ли пространственные стационарные течения? (122).	
§ 6.	Свойства стационарных течений на многообразиях большей размерности . . . . .	126
	6.1. Обобщенные течения Бельтрами (126). 6.2. Структура четырехмерных стационарных течений (128). 6.3. Топология функции вихря (129). 6.4. Отсутствие гладких стационарных течений и точность ограничений (134).	
<b>Глава III. Топологические свойства магнитных и вихревых полей</b>		<b>136</b>
§ 1.	Минимальная энергия и спиральность замороженного поля . . . . .	136
	1.1. Вариационная задача для магнитной энергии (136). 1.2. Экстремальные поля и их топология (137). 1.3. Оценка энергии через спиральность (138). 1.4. Спиральность полей на многообразиях (141).	
§ 2.	Топологические препятствия к релаксации энергии . . . . .	146
	2.1. Модельный пример: две зацепленных трубки тока (146). 2.2. Нижняя граница энергии для нетривиального зацепления (148).	
§ 3.	Задача минимизации Сахарова–Зельдовича . . . . .	151
§ 4.	Асимптотический коэффициент зацепления . . . . .	157
	4.1. Асимптотический коэффициент зацепления пары траекторий (157). 4.2. Отступление о формуле Гаусса (160). 4.3. Другое определение асимптотического коэффициента зацепления (162). 4.4. Формы зацепления на многообразиях (164).	
§ 5.	Асимптотическое число пересечений . . . . .	169
	5.1. Оценки энергии снизу для типичных векторных полей (169). 5.2. Асимптотическое число пересечений для узлов и зацеплений (172). 5.3. Конформный модуль тора (176).	
§ 6.	Энергия узла . . . . .	177
	6.1. Энергия заряженного контура (177). 6.2. Обобщения энергии узла (179).	
§ 7.	Обобщенные спиральности и коэффициенты зацепления . . . . .	182

7.1. Относительная спиральность (182). 7.2. Эргодический смысл интегралов спиральности в старших размерностях (185). 7.3. Интегралы зацепления высших порядков (191). 7.4. Инвариант Калугареану и коэффициент самозацепления (195). 7.5. Голоморфный коэффициент зацепления (196).

§ 8. Асимптотическая голономия и приложения . . . . . 202

8.1. Инварианты Джонса–Виттена для векторных полей (202). 8.2. Интерпретация характеристических классов типа Годбийона–Вея (208).

**Глава IV. Дифференциальная геометрия групп диффеоморфизмов . . . . . 211**

§ 1. Плоскость Лобачевского и предварительные сведения по дифференциальной геометрии . . . . . 212

1.1. Плоскость Лобачевского как группа аффинных преобразований (212). 1.2. Кривизна и параллельный перенос (213). 1.3. Поведение геодезических на римановых многообразиях (216). 1.4. Соотношение между ковариантной производной и производной Ли (218).

§ 2. Секционные кривизны группы Ли, снабженной односторонне инвариантной метрикой . . . . . 220

§ 3. Риманова геометрия группы сохраняющих площадь диффеоморфизмов двумерного тора . . . . . 224

3.1. Тензор кривизны группы диффеоморфизмов тора (224). 3.2. Вычисления кривизн (227).

§ 4. Группы диффеоморфизмов и недостоверные прогнозы . . . . . 229

4.1. Кривизна различных групп диффеоморфизмов (229). 4.2. Недостоверность долгосрочных предсказаний погоды (233).

§ 5. Внешняя геометрия группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы . . . . . 234

§ 6. Сопряженные точки в группе диффеоморфизмов . . . . . 238

§ 7. Вокруг конечности диаметра группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы . . . . . 240

7.1. Связь внутренней и внешней геометрии группы диффеоморфизмов (241). 7.2. Диаметр группы диффеоморфизмов (242). 7.3. Сравнение метрик и пополнение группы  $\mathcal{D}(M)$  (243). 7.4. Отсутствие кратчайшего пути (244). 7.5. Дискретные течения (249). 7.6. наброски доказательств (250). 7.7. Обобщенные течения (251). 7.8. Аппроксимация обобщенных течений жидкости гладкими (254). 7.9. Существование сопряженных точек на группах диффеоморфизмов (257).

§ 8. Бесконечный диаметр группы гамильтоновых диффеоморфизмов и симплектическая гидродинамика . . . . . 259

8.1. Правоинвариантные метрики на симплектоморфизмах (260). 8.2. Инвариант Калаби (262). 8.3. Биинвариантные метрики и псевдометрики на группе гамильтоновых диффеоморфизмов (268). 8.4. Биинвариантная псевдориманова метрика и функционал действия на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов трехмерного многообразия (272).

**Глава V. Проблема быстрого кинематического динамо . . . . . 275**

§ 1. Динамо и растяжение частиц . . . . . 275

	1.1. Быстрое и медленное кинематическое динамо (275). 1.2. Недиссипативные динамо на произвольных многообразиях (278).	
§ 2.	Дискретное динамо в размерности два . . . . .	280
	2.1. Динамо из отображения кошки на торе (280). 2.2. Подковы и многократные складки в конструкциях динамо (283). 2.3. Диссипативные динамо на поверхностях (287). 2.4. Асимптотическое число Лефшеца (289).	
§ 3.	Главные теоремы антидинамо . . . . .	290
	3.1. Теоремы Коулинга и Зельдовича (290). 3.2. Теоремы антидинамо для тензорных плотностей (290). 3.3. Отступление об уравнении Фоккера–Планка (293). 3.4. Доказательство теорем антидинамо (297). 3.5. Дискретные версии теорем антидинамо (300).	
§ 4.	Трехмерные модели динамо . . . . .	301
	4.1. Механизм «веревочного динамо» (301). 4.2. Численное наблюдение эффекта динамо (302). 4.3. Модель диссипативного динамо на трехмерном римановом многообразии (303). 4.4. Геодезические потоки и дифференциальные операции на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (309). 4.5. Сохранение энергии и особенности уравнения Эйлера (314).	
§ 5.	Показатели динамо в терминах топологической энтропии . . . . .	314
	5.1. Топологическая энтропия динамических систем (314). 5.2. Границы показателей в недиссипативных моделях динамо (315). 5.3. Верхние границы для диссипативных $L^1$ динамо (316).	
<b>Глава VI.</b>	<b>Динамические системы гидродинамического происхождения</b>	<b>318</b>
§ 1.	Уравнение Кортевега–де Фриза как уравнение Эйлера . . . . .	318
	1.1. Алгебра Вирасоро (318). 1.2. Принцип сдвига аргумента и интегрируемость уравнений движения многомерного твердого тела (322). 1.3. Интегрируемость уравнения КдФ (327). 1.4. Отступление о когомологиях алгебр Ли и цикле Гельфанда–Фукса (330).	
§ 2.	Уравнения газовой динамики и сжимаемых жидкостей . . . . .	332
	2.1. Баротропные жидкости и газовая динамика (333). 2.2. Другие консервативные системы уравнений, связанные с движением жидкости (337). 2.3. Уравнение бесконечной проводимости (339).	
§ 3.	Кэлерова геометрия и динамические системы на пространстве узлов . . . . .	340
	3.1. Геометрические структуры на множестве вложенных кривых (341). 3.2. Уравнение нити, нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение цепочки Гейзенберга (346). 3.3. Группы петель и общее уравнение Ландау–Лифшица (348).	
§ 4.	Уравнение Соболева . . . . .	350
§ 5.	Эллиптические координаты с гидродинамической точки зрения . . . . .	355
	5.1. Заряды на квадратах в трех измерениях (355). 5.2. Заряды на многомерных квадратах (357).	
<b>Литература</b>		<b>360</b>

<b>Недавние достижения топологической гидродинамики (Б. А. Хесин)</b>	<b>394</b>
§ 1. Групповая и гамильтонова структуры динамики жидкости . . .	394
1.1. Гидродинамическое уравнение Эйлера как геодезический поток (394).	
1.2. Подход Арнольда к уравнению Эйлера (396). 1.3. Гамильтонов подход к несжимаемой жидкости (397). 1.4. Изовихревые поля, функции Казимира и коприсоединенные орбиты группы диффеоморфизмов, сохраняющих объемы (399). 1.5. Особые вихри: точечные вихри и конечномерные приближения (401). 1.6. Особые вихри: вихревые нити и мембраны (403). 1.7. Сжимаемые жидкости и алгебры полупрямых произведений (405). 1.8. Неединственность слабых решений и уравнение Навье–Стокса (406). 1.9. Вариационные принципы для группоидов (407).	
§ 2. Топология стационарных течений жидкости . . . . .	409
2.1. Структура трехмерных стационарных течений: поля Бельтрами (409).	
2.2. Обобщенные поля Бельтрами (411). 2.3. Связь стационарных течений с симплектической и контактной геометрией (412). 2.4. Эйлера и лагранжева неустойчивость (413). 2.5. КАМ и около-стационарные решения (414).	
§ 3. Топологические свойства магнитных и вихревых полей . . . . .	415
3.1. Спиральность и асимптотическое зацепление (415). 3.2. Вихревые и магнитные пересоединения в вязких жидкостях (417).	
§ 4. Дифференциальная геометрия групп диффеоморфизмов . . . . .	418
4.1. Исчисление Отто на пространствах плотностей (418). 4.2. Кривизны, сопряженные точки и ударные волны на группах диффеоморфизмов (421). 4.3. Различные метрики на группах диффеоморфизмов и пространствах плотностей (422). 4.4. Фредгольмовость экспоненциального отображения на группах диффеоморфизмов и гладкость решений уравнения Эйлера (424).	
§ 5. Проблема быстрого кинематического динамо . . . . .	426
5.1. Уравнения кинематического динамо (426). 5.2. Модели динамо (427). 5.3. Надстройка отображения кошки (428). 5.4. Токамаки и стеллараторы (429).	
§ 6. Динамические системы гидродинамического происхождения . . .	430
6.1. Групповые и бигамильтоновы свойства уравнений Кортевега–де Фриза, Камасса–Холма и Хантера–Сакстона (430). 6.2. Вариации на тему уравнения Соболева и бильярдного отображения (432). 6.3. Симплектическая геометрия узлов и мембран (433). 6.4. Преобразования Хасимото и Маделунга (434).	
Литература . . . . .	437
<b>Предметный указатель</b>	<b>453</b>