Предисловие

Теория групп кос представляет собой один из наиболее пленительных разделов топологии малых размерностей. Ее красота происходит из привлекательной геометрической природы кос и из их тесных связей с другими замечательными геометрическими объектами, такими как узлы, зацепления, гомеоморфизмы поверхностей и конфигурационные пространства. На более глубоком уровне интерес математиков к этой теме обусловлен той важной ролью, какую играют косы в разнообразных областях математики и теоретической физики. В частности, изучение кос естественно приводит к разным интересным алгебрам и их линейным представлениям.

Группы кос впервые появились, хоть и неявно, в статье Адольфа Гурвица, опубликованной в 1891 г., которая была посвящена разветвленным накрытиям поверхностей. В явном виде понятие косы было введено Эмилем Артином в 1920-х гг. с целью формализовать топологические объекты, моделирующие переплетение нескольких нитей в евклидовом трехмерном пространстве. Артин обратил внимание на то, что косы с фиксированным числом n нитей образуют группу, которую он назвал n-й группой кос и обозначил через B_n. С тех пор косы и группы кос широко изучались топологами и алгебраистами. Это привело к богатой теории с многочисленными ответвлениями.

В 1983 г. Воган Джонс, занимаясь операторными алгебрами, открыл новые представления групп кос, из которых он вывел свои знаменитые полиномы узлов и зацеплений. Открытие Джонса привело к сильному увеличению интереса к группам кос. Среди более недавних важных результатов в этой области — упорядочиваемость группы кос B_n, доказанная Патриком Деорнуа в 1991 г., и линейность группы кос B_n, доказанная Дааном Краммером и Стивеном Бигелоу в 2001–2002 гг.

Главная цель настоящей книги — дать обстоятельное введение в теорию групп кос и показать разнообразие ее аспектов. Книга предназначена для студентов и аспирантов, а также для всех математиков и физиков, интересующихся косами. Предполагая только базисные познания в топологии и алгебре, мы даем более подробное изложение тем повышенной сложности, включающих вспомогательный материал по топологии и алгебре, часто выходящий за рамки традиционных изложений теории кос. В частности, мы рассматриваем основные свойства симметрических групп, теорию полупростых алгебр и язык разбиений и таблиц Юнга.

Теперь мы более подробно расскажем о содержании книги. Глава 1 касается оснований теории кос и групп кос. В частности, мы описываем связи с конфигурационными пространствами, автоморфизмами свободных групп и с группами классов отображений проколотых кругов.

В главе 2 мы изучаем связь между косами и зацеплениями в евклидовом трехмерном пространстве. Центральный результат этой главы — описание Александера — Маркова ориентированных зацеплений в терминах классов марковской эквивалентности кос.

Глава 3 посвящена двум замечательным представлениям группы кос B_n: представлению Бурау, которое было введено Вернером Бурау в 1936 г., и представлению Лоуренс — Краммера — Бигелоу, которое было введено Рут Лоуренс в 1990 г. Мы используем технику скручиваний Дена для доказательства того, что представление Бурау неточно при больших n, как было впервые установлено Джоном Муди в 1991 г. С помощью введенного Стивеном Бигелоу понятия шнуров в проколотых кругах мы доказываем теорему Бигелоу — Краммера о точности представления Лоуренс — Краммера — Бигелоу. В этой главе мы также строим для зацеплений полином Александера — Конвея от одной переменной.

Глава 4 касается симметрических групп и алгебр Ивахори — Гекке, тесно связанных с группами кос. В качестве их приложения мы строим для зацеплений полином Джонса — Конвея от двух переменных, известный также под названием полином HOMFLY или полином HOMFLY-PT, который обобщает два фундаментальных полинома от одной переменной для зацеплений, а именно уже упомянутый полином Александера — Конвея и полином Джонса.

Глава 5 посвящена классификации конечномерных представлений общих алгебр Ивахори — Гекке в терминах диаграмм Юнга. В качестве приложения мы показываем, что (приведенное) представление Бурау группы кос B_n неприводимо. Мы также обсуждаем алгебры Темперли — Либа и классифицируем их конечномерные представления.

В главе 6 представлено решение Гарсайда проблемы сопряжения в группах кос. Следуя Патрику Деорнуа и Луису Парису, мы вводим понятие гарсайдова моноида, являющегося моноидом с соответствующими свойствами делимости. Мы показываем, что группа кос B_n есть группа частных гарсайдова моноида положительных кос с n нитями. Мы также обсуждаем аналогичные результаты для обобщенных групп кос, ассоциированных с матрицами Кокстера.

Глава 7 посвящена упорядочиваемости групп кос. Следуя Деорнуа, мы доказываем, что для каждого n группа кос B_n упорядочиваема.

Книга завершается четырьмя короткими приложениями: приложение А о модулярной группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, приложение Б о расслоениях, приложение В об алгебрах Бирман — Мураками — Венцля и приложение Г о самодистрибутивных множествах.

Все главы книги в большой степени не зависят друг от друга. Читатель может начать с первого параграфа главы 1 и затем свободно изучать остальную часть книги.

Несомненно, теория кос слишком обширна, чтобы ее можно было исчерпывающе изложить в одной книге. В настоящей книге полностью опущены ее важные разделы, которые касаются ее связей с математической физикой, квантовыми группами, алгебрами Хопфа и сплетенными моноидальными категориями. По этим темам мы отсылаем читателя к монографиям [Lus93], [CP94], [Tur94], [Kas95], [Maj95], [KRT97], [ES98].

Здесь также не представлены вычисления групп гомологий и когомологий групп кос (см. [Арн70], [Вай78], [Sal94], [CS96]), автоматные структуры на группах кос (см. [ECHLPT92], [Mos95]) и приложения к криптографии (см. [СЧЯ93], [AAG99], [KLCHKP00]).

За дополнительными сведениями по теории кос мы отсылаем читателя к следующим монографиям и обзорным статьям: [Bir74], [BZ85], [Han89], [Kaw96], [Mur96], [MK99], [Вер99], [Iva02], [BB05].

Настоящая книга выросла из докладов [Kas02], [Tur02], сделанных авторами на семинаре Бурбаки в 1999 и 2000 гг., и из лекций для студентов, прочитанных К. Касселем в университете имени Луи Пастера в Страсбурге в 2002–2003 гг. и В. Тураевым в университете Индианы в Блумингтоне в 2006 г.

Благодарности

Нам приятно выразить свою благодарность Патрику Деорнуа, Николаю Иванову и Гансу Венцлю за полезные обсуждения и комментарии. Мы особо обязаны Оливье Додану, нарисовавшему рисунки к этой книге и проведшему нас через лабиринт форматов и команд LaTeXа.

Кристиан Кассель,
Владимир Тураев

Страсбург,
3 марта 2008 г.