## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой монографии — дать обзор разных классов бесконечномерных групп Ли и их приложений, главным образом в гамильтоновой механике, в динамике жидкостей, в интегрируемых системах и в комплексной геометрии. Мы решили представить объединяющие идеи этой теории, сосредоточившись на конкретных типах и примерах бесконечномерных групп Ли. Конечно, выбор тем в значительной мере определяется вкусами авторов, но мы надеемся, что этот выбор достаточно широк, чтобы представить разные явления, возникающие в геометрии бесконечномерных групп Ли, и убедить читателя в том, что это — привлекательные для изучения объекты как с чисто математической, так и с прикладной точки зрения.

Эту книгу можно считать дополняющей более алгебраические изложения, в особенности те, которые относятся к структурной теории и теории представлений бесконечномерных алгебр Ли, а также более аналитические изложения, разрабатывающие анализ на бесконечномерных многообразиях.

Эта монография возникла из курсов лекций для старшекурсников и миникурсов по бесконечномерным группам и калибровочной теории, прочитанных Б. А. Хесиным в университете Торонто, в Конференционном математическом центре (CIRM) в Марселе и в Политехнической школе в Париже в 2001—2004 гг. Книга основывается на разных классических и недавних результатах, которым обязана эта недавно возникшая область бесконечномерной геометрии и теории групп.

Мы стремились сделать книгу сжатой, но и достаточно полной, а также удобной в учебных целях. По этой причине мы включили в неё множество разнообразных задач, от простых упражнений до открытых вопросов. В конце каждого параграфа мы приводим библиографические замечания, пытаясь сделать указания на литературу более исчерпывающими, чтобы заинтересованный читатель смог познакомиться с некоторыми последними достижениями в этой увлекательной области — геометрии бесконечномерных групп. Мы надеемся, что эта книга окажется полезной и студентам, и исследователям, занимающимся теорией групп и алгебр Ли, геометрией и гамильтоновыми системами.

Нам приятно поблагодарить всех, кто помог нам в подготовке рукописи этой книги. Мы глубоко признательны нашим учителям, сотрудникам и друзьям, которые повлияли на наше понимание самого предмета этой книги: В. И. Арнольду, Я. Бренье, Э. Бурштыну, Ф. Вагеману, Дж. Вейцману, А. П. Веселову, И. С. Захаревичу, А. А. Кириллову, Ф. Г. Маликову, Г. Мисиолеку, Р. Морару, Н. А. Некрасову, В. Ю. Овсиенко, К. Роже, А. А. Рослому, В. Н. Рубцову, М. А. Семёнову-Тян-Шанскому, Г. Сигалу, П. Слодовы, С. Л. Табачникову, А. Н. Тодорову, В. В. Фоку, И. Б. Френкелю, Д. Б. Фуксу, А. С. Шварцу, А. И. Шнирельману, Я. М. Элиашбергу, П. И. Этингофу и многим другим. Мы особенно благодарны Алексею Рослому, на совместных исследованиях с которым основана большая часть этой книги, и в частности глава о приложениях групп, и который сделал много бесценных замечаний при подготовке рукописи. Мы благодарны слушателям курсов за их стимулирующие вопросы и замечания. Мы особенно благодарны М. Петерсу и коллективу издательства Шпрингер за их неизменную помощь, Д. Крамеру за редактирование английского текста и С. Н. Малыгину за перевод на русский.

Мы также признательны за поддержку Институту Макса Планка в Бонне, Институту высших научных исследований в Бюре-сюр-Ивете, Математическому институту Клэя и NSERC (Научно-технический совет Канады). Работа над этой книгой частично велась, когда первый автор был сотрудником Математического института Клэя.

Наконец, мы благодарны нашим семьям (включая детей!) за их неустанную моральную поддержку в течение чрезмерно растянувшейся работы над рукописью и переводом.

## ВВЕДЕНИЕ

> Алгебраисты обычно определяют группы как множества с операциями, удовлетворяющими длинному ряду труднозапоминаемых аксиом...
>
> *В. И. Арнольд* «Математика с человеческим лицом» [20]

Сегодня нельзя представить себе математику и физику без групп Ли, которые лежат в основаниях столь многих структур и теорий. Многие из этих групп имеют бесконечную размерность и естественно возникают в задачах, связанных с дифференциальной и алгебраической геометрией, с теорией узлов, с динамикой жидкости, космологией и теорией струн. Такие группы часто появляются как симметрии различных эволюционных уравнений, и их применения простираются от квантовой механики до метеорологии. Хотя бесконечномерные группы Ли уже давно привлекли к себе внимание, область применимости общей теории для таких групп достаточно ограничена. Основная причина этого в том, что бесконечномерные группы Ли проявляют весьма необычные свойства.

Взглянем, например, на соотношение между группой Ли и её алгеброй Ли. Как хорошо известно, в случае конечной размерности каждая группа Ли, по крайней мере локально, вблизи единицы, полностью описывается своей алгеброй Ли. Это достигается с помощью экспоненциального отображения, являющегося локальным диффеоморфизмом между алгеброй и группой Ли.

В случае бесконечной размерности это соответствие гораздо более сложно. Существуют группы Ли, не допускающие экспоненциального отображения. Кроме того, даже если для данной группы существует экспоненциальное отображение, оно может не быть локальным диффеоморфизмом.

Ещё одна патология в случае бесконечной размерности — отсутствие третьей теоремы Ли, утверждающей, что всякая конечномерная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой конечномерной группы. В противоположность этому существуют бесконечномерные алгебры Ли, вообще не соответствующие никакой группе Ли.

Чтобы избежать таких патологий, любую попытку построения общей теории бесконечномерных групп Ли приходилось бы ограничивать некоторыми классами таких групп и изучать их отдельно. Например, можно было бы рассмотреть класс банаховых групп Ли, т. е. групп Ли с топологией банаховых пространств, которые ведут себя во многом подобно конечномерным группам Ли. Для банаховых групп Ли экспоненциальное отображение всегда существует и является локальным диффеоморфизмом. Однако желание ограничиться лишь банаховыми группами Ли уже исключило бы важный класс групп диффеоморфизмов и так далее. Вот почему попытки развить единую теорию бесконечномерной дифференциальной геометрии, а следовательно, и бесконечномерных групп Ли, всё ещё далеки от достижения большей общности.

В настоящей книге мы избрали другой подход. Вместо того чтобы попытаться развить общую теорию таких групп, мы сосредоточились на разных примерах бесконечномерных групп Ли, которые связаны с множеством важных приложений.

Рассматриваемые нами примеры в основном принадлежат трём общим типам бесконечномерных групп Ли: группы диффеоморфизмов, группы калибровочных преобразований и группы псевдодифференциальных операторов. Между разными группами, встречающимися в этой книге, имеются многочисленные взаимосвязи. Например, группа диффеоморфизмов компактного многообразия естественно действует на группе токов на этом многообразии. В случае, когда это многообразие является окружностью, это действие приводит к глубокой связи между теорией представлений алгебры Вирасоро и алгебр Каца—Муди. В геометрической ситуации настоящей книги эта связь проявляется в соответствии между коприсоединёнными орбитами этих групп.

Ещё одной нитью, связывающей разные рассматриваемые нами группы, является тема «лестницы» групп токов. Мы рассматриваем переход от конечномерных групп Ли (т. е. «групп токов в точке») к группам петель (т. е. к группам токов на окружности) и затем к группам двойных петель (к группам токов на двумерном торе) как некую «лестницу групп». На уровне динамических систем это соответствует переходу от рациональных к тригонометрическим, а затем — к эллиптическим системам Калоджеро—Мозера. Переход от групп обычных петель к группам двойных петель также служит отправной точкой «вещественно-комплексного соответствия», обсуждаемого в главе о приложениях групп. Там мы изучаем пространства модулей плоских или интегрируемых связностей над вещественными и комплексными поверхностями, используя геометрию коприсоединённых орбит этих двух типов групп.

Большинство основных объектов, изучаемых в этой книге, можно свести в следующую таблицу.

| Размерность базы | Вещественная/топологическая теория | Комплексная/голоморфная теория |
|---|---|---|
| 1 | аффинные группы (или группы петель) (орбиты $\sim$ монодромии связностей над окружностью) | эллиптические группы (или группы двойных петель) (орбиты $\sim$ голоморфные расслоения над эллиптической кривой) |
| 2 | плоские связности на римановой поверхности (пуассоновы структуры) | голоморфные расслоения на комплексной поверхности (голоморфные пуассоновы структуры) |
| 3 | связности на трёхмерном многообразии (функционал Черна—Саймонса, сингулярные гомологии, классические зацепления) | частичные связности на комплексном трёхмерном многообразии (голоморфный функционал Черна—Саймонса полярные гомологии, голоморфные зацепления) |

В гл. II мы в некотором смысле движемся горизонтально по первой строке этой таблицы. Мы изучаем аффинные и эллиптические группы, их орбиты и геометрию, в также связанные с ними системы Калоджеро—Мозера. Кроме того, мы описываем в этой главе многие группы и алгебры Ли, не вошедшие в таблицу: группы диффеоморфизмов, группу Вирасоро, группы псевдодифференциальных операторов. В добавлениях можно найти алгебры Кричевера—Новикова, алгебру $\mathfrak{gl}_\infty$ и другие связанные с ними объекты.

В гл. III мы движемся вертикально по таблице, сосредоточившись в основном на группах токов и на их параллельном описании в топологическом и голоморфном контекстах. В то время как аффинные и эллиптические группы Ли соответствуют (вещественной или комплексной) размерности базы, равной 1, в размерности 2 мы описываем пространства связностей над (вещественными или комплексными) поверхностями, а также симплектические и пуассоновы структуры на соответствующих пространствах модулей. (В таблице основной предмет изучения указан в скобках в соответствующей клетке.) В размерности 3 изучение функционала Черна—Саймонса и его голоморфного аналога приводит к понятиям классического и голоморфного зацепления и к соответствующим теориям гомологий. (Хотя мы ограничились тремя размерностями, эту таблицу можно продолжить до размерности 4 и далее, что приводит к функционалу Янга—Миллса и многим другим интересным функционалам; см., например, [85].)

Заметим, что объекты (группы, связности и т. д.) в каждой строке этой таблицы обычно предписывают структуру объектов, расположенных на строку выше, хотя это «взаимодействие строк» и отличается в вещественном и комплексном случаях. Так, в вещественной ситуации многообразия меньшей размерности появляются как границы многообразий, размерность которых на единицу больше. В комплексном же случае комплексные алгебраические многообразия меньшей размерности появляются как дивизоры в многообразиях большей размерности; подробнее см. в гл. III.

**Обзор содержания.** Остановимся немного подробнее на содержании глав и параграфов книги.

В гл. I мы напоминаем необходимые понятия и факты теории Ли и симплектической геометрии, которые будут использоваться во всей книге. Начав с определения группы Ли, мы даём обзор основных связанных с ней понятий — её алгебры Ли, присоединённого и коприсоединённого представлений — и вводим центральные расширения групп и алгебр Ли. Необходимые нам понятия симплектической геометрии включают описание по Арнольду уравнений Эйлера на группах Ли, представляющих собой уравнения для геодезического потока относительно односторонне-инвариантной метрики на группе. Этот подход позволяет дать единообразное описание многих конечномерных и бесконечномерных динамических систем, включая классические уравнения Эйлера для твёрдого тела и для идеальной жидкости, уравнение Кортевега—де Фриза и уравнения магнитной гидродинамики. Наконец, во вводной главе мы напоминаем гамильтонову редукцию Марсдена—Вейнстейна — метод, который часто используется для описания сложных гамильновых систем исходя из более простых, но с дополнительными симметриями.

Глава II — главная часть книги. Её можно рассматривать как своего рода прогулку по зоопарку разных типов бесконечномерных групп Ли. Помимо определений и явных конструкций наше знакомство с каждым из этих типов включает также и описание их коприсоединенных орбит, а иногда — и их полную классификацию. Мы обсуждаем связь этих групп с гамильтоновыми системами и подробно описываем конструкции, связанные с их интегрируемостью.

Эта глава начинается с введения группы петель компактной группы Ли — одного из наиболее изучаемых типов бесконечномерных групп. В § 1 мы строим её универсальное центральное расширение и соответствующую алгебру Ли (называемую аффинной алгеброй Каца—Муди), а также классифицируем ее коприсоединённые орбиты. В последующем мы ещё вернёмся к этой алгебре Ли, чтобы обсудить её связь с уравнением Ландау—Лифшица и интегрируемой системой Калоджеро—Мозера.

В § 2 мы обращаемся к группе диффеоморфизмов окружности и её алгебре Ли гладких векторных полей на этой окружности. И эта группа, и её алгебра Ли допускают универсальные центральные расширения, которые называются группой Вирасоро—Ботта и алгеброй Вирасоро соответственно. Оказывается, коприсоединённые орбиты группы Вирасоро—Ботта можно классифицировать подобно орбитам групп петель. Уравнением Эйлера для естественной правоинвариантной метрики на группе Вирасоро—Ботта является знаменитое уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ), которое описывает волны на мелкой воде. Кроме того, эйлерова природа КдФ помогает доказать, что это уравнение вполне интегрируемо.

Параграф 3 посвящён разным группам диффеоморфизмов и, в частности, группе сохраняющих объёмы диффеоморфизмов компактного риманова многообразия $M$. Уравнение Эйлера на этой группе описывает движение идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей $M$. Расширение группы сохраняющих объёмы диффеоморфизмов либо гладкими функциями, либо векторными полями на $M$ даёт уравнения Эйлера для газовой динамики или магнитной гидродинамики соответственно. Мы также остановимся на некоторых результатах римановой геометрии групп диффеоморфизмов и обсудим связь этих групп с симплектической структурой Марсдена—Вейнстейна на пространстве иммерсированных кривых в $\mathbb{R}^3$.

В § 4 мы имеем дело с группой псевдодифференциальных символов (или операторов) на окружности. Оказывается, эта группа может быть наделена структурой группы Пуассона—Ли, в которой соответствующие пуассоновы структуры задаются скобками Адлера—Гельфанда—Дикого. Этой группе естественно соответствуют такие динамические системы, как иерархия Кадомцева—Петвиашвили, высшие уравнения КдФ и нелинейное уравнение Шрёдингера.

В § 5 мы возвращаемся к группам петель «на следующем уровне»: здесь мы имеем дело с их обобщениями — эллиптическими группами Ли и соответствующими алгебрами Ли. Эти группы являются расширениями групп двойных петель, т. е. групп гладких отображений двумерного тора в конечномерную комплексную группу Ли. Центральное расширение такой группы связано с выбором комплексной структуры на этом торе (т. е. с выбором эллиптической кривой). Коприсоединённые орбиты эллиптических групп Ли могут быть классифицированы в терминах голоморфных главных расслоений над эллиптической кривой.

Этот параграф также объединяет несколько классов рассмотренных ранее групп в свете их применения к системам Калоджеро—Мозера. Оказывается, интегрируемые типы потенциалов в этих системах (рациональный, тригонометрический и эллиптический потенциалы) могут быть получены гамильтоновыми редукциями из конечномерных полупростых алгебр Ли, аффинных алгебр и эллиптических алгебр Ли соответственно.

Глава III посвящена далеко идущим применениям параллелизма между аффинными и эллиптическими алгебрами Ли, который можно рассматривать как «вещественно-комплексное» соответствие. Здесь мы имеем дело с бесконечномерными группами Ли калибровочных преобразований главных расслоений над вещественными и комплексными поверхностями. Мы показываем, как классификация коприсоединённых орбит групп петель (соответственно групп двойных петель) позволяет изучить пуассонову структуру на пространстве модулей плоских связностей (соответственно полустабильных голоморфных расслоений) над римановой поверхностью (соответственно над комплексной поверхностью).

Соответствие между вещественными и комплексными структурами приводит к довольно удивительным аналогиям между понятиями в дифференциальной топологии (такими, как ориентация, край и теорема Стокса) и в комплексной алгебраической геометрии (мероморфная дифференциальная форма, её дивизор полюсов и формула Коши—Стокса). Эти аналогии формализуются в понятии групп полярных гомологий, а их приложения включают построение голоморфного коэффициента зацепления для пары комплексных кривых в комплексном трёхмерном многообразии. Определение голоморфного зацепления оказывается тесно связаным с голоморфным вариантом функционала Черна—Саймонса.

В добавлениях мы обсуждаем несколько тем, которые либо служат объяснением фактов, использовавшихся в основном тексте, либо указывают на недавние исследования. В частности, мы включили в них напоминания о системах корней и несколько важных фактов из теории компактных групп Ли.

В других добавлениях даются краткое введение и ссылки на литературу по таким темам, как алгебра $\mathfrak{gl}_\infty$, алгебры Кричевера—Новикова (обобщающие алгебру Вирасоро и алгебры петель на римановы поверхности более высокого рода), интегрируемые системы на пространствах модулей плоских связностей, кэлеровы структуры на пространствах орбит Вирасоро, связь групп диффеоморфизмов с оптимальным переносом массы, метрика Хофера на группе гамильтоновых диффеоморфизмов, редукция Дринфельда—Соколова, а также доказательства нескольких утверждений из основного текста.

**Система нумерации и беглое чтение.** Мы используем единую нумерацию определений, теорем и т. п. Римская цифра в ссылке указывает на номер главы, а её отсутствие указывает на то, что ссылка даётся на эту же главу.

Разные параграфы из гл. II можно читать в значительной степени независимо друг от друга. Кроме того, гл. III основывается только на двух параграфах из гл. II: § 1 об аффинных группах и § 5 об эллиптических группах. Параграф о полярных гомологиях достаточно независим от других, хотя и мотивирован предшествующим изложением в гл. III.

Для первого чтения мы рекомендуем следующий «сокращённый план» книги. После предварительных сведений в гл. I можно приступить к § 1, 2 и 5 гл. II и § 2 и 3 гл. III. Читатель, более интересующийся приложениями к гамильтоновым системам, найдёт их главным образом в §§ 2—5 гл. II, а за приложениями теории к пространствам модулей плоских связностей, можно обратиться к гл. III сразу после § 1 и 5 гл. II.