

Предисловие

Дух познает приходящее,
знания сохраняют уходящее.

Конфуций

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант лекций, предлагаемых автором в бакалавриате студентам первого и второго курса Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета). Цель дисциплины — показать единый корень классической и квантовой механики так, как это представляется современной науке, а также обозначить единство принципов построения механики частиц и полей, что предполагает использование и соответствующего математического аппарата. Весь подход в целом — это фейнмановская формулировка механики таким образом, как она видится с позиций настоящего времени¹.

Этот тезис позволяет задать направление мысли так, что вместо эмпирико-эвристического построения мозаики различных аспектов описания механики частиц и полей предлагается пойти по пути более общей идеи, минимизирующей необходимость детализации опытных изысканий и опирающейся на логически ясную и явно указанную базу аксиом, благодаря чему обширное множество эмпирико-эвристических клипов становятся довольно простыми следствиями этой общей идеи. Это можно сравнить с известной притчей о трех слепых мудрецах, которых попросили описать слона. Эта неудачная история исследования слона предстанет совсем в другом свете, если опереться на более общую и глубокую идею эволюции видов: это исследование обратится в частный эпизод на древе развития жизни. Нечто подобное автор этого курса считает необходимым проделать и с механикой, а именно, с самого начала оперировать терминами, в которых общая идея механики становится логическим корнем для вывода множества фактов, которые сами прежде казались постулатами.

В основе курса — законы механики [11, 19–21, 23, 25], сформулированные в таком ракурсе, который позволяет затем их наиболее просто и эффективно применять для описания частиц и полей в классической нерелятивистской механике и подготовить методический инструментарий для логически ясного перехода к релятивистской механике частиц и теории поля, а также к квантовой теории в качестве продолжения данного спецкурса. В такой постановке целей изложения особый упор сделан на обоснование и применение таких понятий, как действие, теорема Нётер и сохраняющиеся величины, пространственно-временные симметрии, гамильтонова механика, движение в кулоновском или гравитационном поле и в поле изотропного осциллятора. Изложение пространственно-временных симметрий предусматривает

¹Более точно следует сказать, что фейнмановская формулировка механики излагается так, как ее понимает автор этой книги, конечно.

обучение векторному анализу и, как следствие, введение генераторов пространственных трансляций и поворотов для полей, понятия спина для поля, а значит, описание всей процедуры «квантования» собственных значений эрмитовых матриц для генераторов группы $SU(2)$. Рассмотрение матричного представления спиновых генераторов поворотов полей позволяет построить неприводимые тензорные представления для полей с собственным моментом $s = 0, 1, 2$, а при рассмотрении неприводимых тензорных произведений единичного радиус-вектора вывести выражения для сферических гармоник скаляра, вектора и тензора второго ранга.

Векторный анализ излагается в научном стиле: если в логике изложения возникает ключевой, хоть и не простой вопрос, то он не откладывается на потом (тогда «потом» растёт как снежный ком), а рассматривается сразу, на месте. Как следствие такого подхода, изучается описание в криволинейных координатах, включая производную Ли и ковариантную производную, что позволяет перевести физический принцип эквивалентности инертной и гравитационной массы в плоскость математического рассмотрения, которое приводит к введению псевдоевклидова пространства-времени Минковского и риманова пространства. Кроме того, пространственно-временной взгляд на движение позволяет провести рассмотрение тензора энергии-импульса для частиц и поля, а также калибровочную симметрию преобразования поля.

В качестве приложений изучения симметрий движений построены сохраняющиеся интегралы движения для траекторий в кулоновском поле и для изотропного осциллятора, а также фазовый инвариант периодического и квазипериодического движения с рассмотрением его физического смысла в случае движения в магнитном поле.

Наконец, излагается метод решения уравнений движения с помощью преобразования Фурье с определением дельта-функции Дирака на примере квазиупругого диполя в поле электромагнитной волны, описан метод функции Грина для вынужденных колебаний классического осциллятора, подчеркнуты физические различия для разных прескрипций обхода полюсов в плоскости комплексной частоты и их роль при использовании запаздывающей и причинной функций Грина классического осциллятора.

Таким образом, изложение построено так, чтобы дать единый взгляд как на классическую нерелятивистскую механику частиц и полей, так и на классическую и квантовую механику с их общим генезисом в терминах действия и его симметрий.

Наконец, поскольку фейнмановская формулировка механики использует понятия из теории вероятностей, ее элементарные основы изложены в приложении к базовому тексту книги для полноты картины у тех читателей, кто на момент изучения механики оказался недостаточно знаком с понятиями вероятности и ее ключевыми характеристиками.

Автор выражает признательность своим коллегам Н. Колганову и В. Шмидту, которые вели семинары по спецкурсу, благодаря чему по ходу практических занятий в текст книги были внесены правки, хотя ряд вопросов излага-

ется автором в своей манере, а не так, как это предпочитали делать коллеги на семинарах.

Автор признателен студентам Физтеха П. Лебедеву, М. Князеву, Д. Самоделкину и А. Новохатнему, благодаря которым были исправлены ошибки и опечатки в тексте, а также некоторые формулировки и подходы к изложению материала книги. Особая благодарность моему коллеге Д. Осипову, который в рамках другого проекта столь детально раскритиковал главу о группе поворотов, что может считаться полноценным соавтором ее текущей версии.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу `kiselev.vv@phystech.edu` с пометкой «Спецкурс по нерелятивистской механике» или просто «NRMech».

«Математический барьер»

В книге используются следующие обозначения и формулы.

Факториал. $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$; $0! = 1$.

Бином Ньютона. $(a + b)^N = \sum_{k=0}^N C_N^k a^{N-k} b^k$, $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $N \in \mathbb{N}$.

Сумма геометрической прогрессии. Для геометрической прогрессии $b_n = b_0 q^n$, $n \geq 0$, сумма ее членов $S_N = \sum_{n=0}^N b_n$ равна

$$S_N = b_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Производная функции. $f'(x) = \frac{df}{dx}$,

$$\frac{df}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Производная экспоненты

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Производная по времени обозначается символом с точкой $\dot{q}(t) \equiv \frac{dq}{dt}$.

Частная производная — символьная производная. Если в формуле для функции f есть много символов, которые могут играть роль переменных, то дифференцирование проводится по символу в формуле. Например, для функции

$$f = a + v \cdot t$$

легко найти частные производные функции, зависящей от трех аргументов, $f = f(a, v, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = t, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = v.$$

Эту же функцию можно рассмотреть как функцию пути $s = v \cdot t$, т.е. $f(a, s) = a + s$, так что

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 1,$$

и в более сложном варианте: так как

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \quad f\left(a, \frac{\partial s}{\partial t}, t\right) = a + \frac{\partial s}{\partial t} \cdot t,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)} = t,$$

в чем легко убедиться, если опять ввести символьное обозначение $\frac{\partial s}{\partial t} = v$.

Дифференциал — бесконечно малое изменение функции, линейное по дифференциалам аргументов функции. Для $f = f(x, y)$

$$df = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} (f(x + dx, y + dy) - f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy.$$

Комплéксные числа. Два вещественных числа x и y составляют комплексное число

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1,$$

с умножением

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Комплéксное сопряжение: $z^* = x - iy$. Квадрат модуля комплексного числа: $|z|^2 = z^*z = x^2 + y^2$.

У комплексного числа вида $z = \cos \phi + i \sin \phi$ модуль равен единице, так как

$$z^*z = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1.$$

Исследуем это комплексное число как функцию угла ϕ , $z = z(\phi)$, а именно, вычислим производную по ϕ :

$$\frac{d}{d\phi} z(\phi) = \frac{d}{d\phi} (\cos \phi + i \sin \phi) = -\sin \phi + i \cos \phi = i(\cos \phi + i \sin \phi) = i \cdot z(\phi).$$

Дифференциальное уравнение

$$z'(\phi) = i \cdot z(\phi), \quad \text{при условии } z(0) = 1,$$

элементарно решается, так как для производной экспоненты с аргументом $f(\phi)$ дифференцирование сложной функции дает

$$\frac{d}{d\phi} e^{f(\phi)} = \left(\frac{d}{df} e^{f(\phi)}\right) \cdot \left(\frac{d}{d\phi} f(\phi)\right) = e^{f(\phi)} \cdot f'(\phi),$$

откуда находим, что при $f(\phi) = i\phi$

$$\frac{d}{d\phi} e^{i\phi} = e^{i\phi} \cdot i, \quad \text{при условии } e^{i0} = 1.$$

Поэтому

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Отсюда следует тождество Эйлера $e^{i\pi} = -1$. Значения функции

$$z(\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$$

— это точки на единичной окружности с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной z , т. е. на плоскости с декартовыми координатами (x, y) .

Столбцы, строки, матрицы. Вектор в декартовых координатах на плоскости

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

можно записать в виде столбца, образованного координатными компонентами вектора:

$$\mathbf{r} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

По теореме Пифагора квадрат длины вектора равен сумме квадратов его компонент:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Эту же формулу можно записать в другом виде, если ввести вектор-строку

$$\mathbf{r}^T \mapsto (x, y),$$

которую получают из столбца операцией транспонирования. Заметим, что и столбец можно получить из строки операцией транспонирования.

Матричное умножение строки на столбец задается в виде суммы покомпонентного умножения

$$(a, b) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd.$$

Поэтому

$$r^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Если компоненты вектора — это комплексные числа, то введем обозначение для столбца (кет-вектор)

$$|z\rangle \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

и эрмитово сопряжение \dagger как операцию транспонирования и комплексного сопряжения, которая дает строку (бра-вектор)

$$\langle z| \equiv (z_1^*, z_2^*), \quad \langle z| \equiv (|z\rangle)^\dagger.$$

Тогда матричное умножение бра-вектора на кет-вектор задает квадрат длины

$$\langle z|z\rangle = (z_1^*, z_2^*) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Матрица размером 2×2 — это две двумерных строки или два двумерных столбца:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное умножение как умножение каждой строки на каждый столбец приводит к новой матрице

$$\hat{F} \cdot \hat{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ac' + bd' \\ a'c + b'd & a'c' + b'd' \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряжение матрицы

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z'_1 & z'_2 \end{pmatrix}$$

получается в результате композиции комплексного сопряжения и транспонирования строк и столбцов:

$$\hat{Z}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_1'^* \\ z_2^* & z_2'^* \end{pmatrix}.$$

Определенный интеграл по Риману. Для $x_0 = a$, $x_N = b$

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \lim_{\substack{dx_k \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^N dx_k \cdot f(x_k).$$