

Предисловие к шестому изданию

За исключением мелких замечаний настоящее издание мало чем отличается от предшествующего пятого. В четвертое и пятое издание был добавлены новые материалы — «Производящие функции» и «Принцип включения-исключения», являющиеся наиболее мощными средствами дискретной теории вероятностей.

Ранее мы отмечали, что в дополнение к «Вероятности — 1» и «Вероятности — 2», вышедшими в 2006 и 2011 годах в издательстве МЦНМО, было издано также пособие «Задачи по теории вероятностей». Многие слушатели наших лекций и читатели не раз интересовались решениями приведенных там задач. В 2013 году была издана книга «Вероятность в теоремах и задачах. Книга 1» (авторы — Ширяев А. Н., Эрлих И. Г., Яськов П. А.), в которой приведены решения задач из первых двух глав «Вероятности — 1» вместе с большим количеством новых задач и утверждений из теории вероятностей и теории множеств.

В настоящее время готовятся к изданию решения задач из следующих глав «Вероятности — 1» и «Вероятности — 2». Эти дополнения к теоретическому материалу данных пособий будут полезны как студентам, так и преподавателям, поскольку они показывают, как надо подходить к решению задач и как их излагать.

Я благодарен издательству МЦНМО за выпуск всех этих книг.

Москва, июль 2016

А. Ширяев

Предисловие к третьему изданию

Если принять во внимание, что первое издание нашей книги «Вероятность» вышло в 1980 г., второе — в 1989 г., а настоящее, третье, — в 2004 г., то можно сказать, что издания выходят примерно с десяти-пятнадцатилетним интервалом. (На английском языке книга издавалась в 1984 и 1996 гг. и на немецком — в 1988 г.)

Время показывает, что отбор материала для первых двух изданий таков, что он сохраняет свою актуальность и сейчас. Это определило то, что мы сохранили структуру предшествующих изданий, внося, однако, в настоящие книги «Вероятность — 1» и «Вероятность — 2» ряд существенных изменений и дополнений.

Прежде всего это относится к последней, восьмой, главе, посвященной изложению теории марковских цепей с дискретным временем. По существу, эта глава написана заново. Теперь в ней содержится больше материала, приводятся подробные доказательства многих утверждений, ранее изложенные лишь в конспективной форме. Особое внимание уделено строго марковскому свойству и концепциям стационарных и эргодических распределений. Специальный параграф отведен для изложения теории оптимальных правил остановки марковских цепей.

Новый материал добавлен также и в седьмую главу, относящуюся к теории мартингалов с дискретным временем. В § 9 приводится дискретный вариант формулы К. Ито, что может рассматриваться как введение в стохастическое исчисление для броуновского движения, где формула замены переменных Ито играет исключительно важную роль. В § 10 этой главы показывается, как методы теории мартингалов позволяют просто получать оценки вероятностей разорения страховых компаний, эволюция капитала которых описывается моделью Крамера—Лундберга. Материал § 11 относится к «теории арбитража» в стохастической финансовой математике. Здесь приводятся две «фундаментальные теоремы теории арбитража», дающие в мартингальных терминах условия отсутствия арбитражных возможностей и условия, гарантирующие существование такого портфеля ценных бумаг, который позволяет достичь поставленной финансовой цели. В § 12 приводится ряд важных результатов «финансовой инженерии» относительно расчетов рациональных (справедливых) стоимостей опционов и структуры «хеджирующих» портфелей ценных бумаг. Общей теории оптимальных правил остановки для произвольных случайных последовательностей отведен § 13 этой главы. Излагаемый материал служит хорошей иллюстрацией того, как понятия и результаты теории

мартингалов «работают» в разнообразных проблемах «стохастической оптимизации».

В другие главы также внесен ряд изменений и дополнений.

Отметим здесь новый материал, относящийся к теоремам о монотонных классах (§ 2 главы II), основанный на детальном изложении понятий и свойств « π - λ -систем», и § 13 главы III, посвященный некоторым фундаментальным теоремам математической статистики.

Новым в настоящем издании является «Очерк истории становления математической теории вероятностей», помещенный в конце книги «Вероятность — 2».

В ряд параграфов внесены новые задачи.

Автор глубоко признателен Т. Б. Толозовой за большой труд по научному редактированию книги и руководству издательства Московского центра непрерывного математического образования как за предложение о новом издании, так и за быстрое и эффективное осуществление проекта по изданию книги.

Москва, 2003

А. Ширяев

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Предисловие ко второму изданию

В предисловии к первому изданию, вышедшему в 1980 г., отмечалось, что основу книги составили лекции, читаемые автором на механико-математическом факультете Московского университета им. М. В. Ломоносова и частично изданные ротاپринтным способом под названием «Вероятность, статистика, случайные процессы, I, II» издательством МГУ. Наш первоначальный замысел при написании первого издания настоящей книги состоял в том, чтобы пособие содержало три части: «Вероятность», «Математическая статистика», «Теория случайных процессов», соответствующие программе трехсеместрового курса лекций для математических специализаций университетов. Однако в ходе работы над книгой этот замысел осуществить полностью не удалось, поскольку принятый характер изложения потребовал бы значительно большего объема. В связи с этим в предисловии к первому изданию говорилось, что «достаточно полно здесь представлена лишь теория вероятностей и теория случайных процессов с дискретным временем».

Практически весь текст первого издания входит и в настоящее. Изменения, исправления носят, как правило, редакционный характер с учетом также и тех замечаний, которые были получены мною от советских и зарубежных читателей, знакомых с книгой по русскому изданию и переводам на английский и немецкий языки [98], [99]. Автор искренне признателен всем им за внимание, советы и доброжелательную критику.

В настоящее, второе, издание добавлен новый материал: в главе III это § 5, §§ 7—12, в главе IV — § 5, в главе VII — § 8. Наиболее существенно дополнена третья глава. Здесь читатель найдет изложение ряда вопросов, относящихся к более углубленному изучению таких тем, как меры близости вероятностных мер, метризуемость слабой сходимости, контигуальность вероятностных мер. В эту же главу добавлены доказательства ряда важных результатов о скорости сходимости в центральной предельной теореме и в теореме Пуассона об аппроксимации биномиального распределения пуассоновским, которые в первом издании присутствовали лишь в виде формулировок.

Отметим также новый материал о вероятностях больших отклонений (глава IV, § 5) и центральную предельную теорему для сумм зависимых случайных величин (глава VII, § 8).

За последние несколько лет вероятностная литература, издаваемая Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука», пополнилась учебниками Б. А. Севастьянова [97], 1982 г., Ю. А. Ро-

занова [95], 1985 г., учебным пособием А. А. Боровкова [7], 1986 г., и учебником Б. В. Гнеденко [15], 1988 г. В 1985 г. и 1986 г. издательство МГУ издало учебное пособие Я. Г. Синая [128]. Представляется, что эти издания вместе с настоящим, во многом отличаясь и дополняя друг друга, охватывают довольно обширный материал, в существенном достаточно полно удовлетворяющий современным требованиям, предъявляемым к преподаванию теоретико-вероятностных дисциплин студентам физико-математических специализаций.

В учебнике Б. В. Гнеденко приводится много хорошо подобранных примеров в том числе и прикладного содержания, дается большой материал методологического характера и обширный очерк истории теории вероятностей. Учебное пособие А. А. Боровкова [7], пожалуй, наиболее сходно с настоящей книгой по стилю изложения. Специального упоминания заслуживают главы 9 («Элементы теории восстановления»), 11 («Факторизационные тождества») и 17 («Функциональные предельные теоремы»), которые отличают пособие [7] от настоящего и [15], [95]. Учебник Ю. А. Розанова содержит большой материал, касающийся разнообразных математических моделей, которые теория вероятностей и математическая статистика предлагают для описания случайных явлений и их эволюции. В основу учебника Б. А. Севастьянова положен двухсеместровый курс его лекций в МГУ. Материал заключительных четырех глав этого учебника охватывает тот необходимый минимум, который входит в университетскую программу годового курса по теории вероятностей и математической статистике. В нашем пособии, возможно в большей степени, нежели чем в отмеченных выше, значительное место уделено теоретико-множественным аспектам и математическим основаниям теории вероятностей.

В учебниках Б. В. Гнеденко и Б. А. Севастьянова в конце каждой главы, а в настоящем пособии — в конце каждого параграфа добавлены упражнения и задачи, которые вместе, например, с задачками А. В. Прохорова, В. Г. Ушакова, Н. Г. Ушакова «Задачи по теории вероятностей» — М.: Наука, 1986, и А. М. Зубкова, Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова «Сборник задач по теории вероятностей» — М.: Наука, 1988, могут быть использованы читателем для самоконтроля, а преподавателями для проведения семинарских занятий со студентами.

Москва, октябрь 1988

А. Ширяев

Предисловие к первому изданию

В основу настоящего учебного пособия положен трехсеместровый курс лекций, который читался автором в течение ряда лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета и был частично издан ротاپринтным способом под названием «Вероятность, статистика, случайные процессы, I, II», изд-во МГУ.

В соответствии с традицией первая часть курса (примерно один семестр) отводится на элементарную теорию вероятностей (глава I). Изложение начинается с построения вероятностных моделей с конечным числом исходов и введения основных вероятностных понятий таких, как элементарные события, события, вероятность, независимость, случайные величины, математические ожидания, корреляция, условные вероятности и др.

Многие вероятностно-статистические закономерности хорошо прослеживаются уже на примере простейшего случайного блуждания, порожденного схемой Бернулли. В связи с этим для этого случая излагаются как классические результаты (закон больших чисел, локальная и интегральная теоремы Муавра и Лапласа), так и более современные результаты (например, закон арксинуса).

Завершается первая глава рассмотрением зависимых случайных величин, образующих мартингал и марковскую цепь.

Главы II—IV являются расширенным изложением второй части курса (второй семестр). Здесь излагается (глава II) ставшая общепринятой аксиоматика теории вероятностей А. Н. Колмогорова и дается математический аппарат, составляющий арсенал средств современной теории вероятностей (σ -алгебры, меры и способы их задания, интеграл Лебега, случайные величины и случайные элементы, характеристические функции, условные математические ожидания относительно σ -алгебр, гауссовские системы и др.). Следует отметить, что два результата теории меры — теорема Каратеодори о продолжении меры и теорема Радона—Никодима — принимаются без доказательства.

Третья глава посвящается вопросам слабой сходимости вероятностных распределений и методу характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Вводятся понятия относительной компактности и плотности семейства вероятностных распределений и доказывается (для случая числовой прямой) теорема Ю. В. Прохорова об эквивалентности этих понятий.

К этой же части курса отнесено рассмотрение свойств «с вероятностью единица» для последовательностей и сумм независимых случайных вели-

чин (глава IV). Приводятся доказательства законов «нуля или единицы» (Колмогоров, Хьюитт и Сэвидж), критерии сходимости рядов и даются условия справедливости усиленного закона больших чисел. Закон повторного логарифма формулируется для произвольных последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом и доказывается в предположении, что эти величины имеют гауссовское распределение.

Наконец, третья часть курса (главы V—VIII) отводится случайным процессам с дискретным временем (случайным последовательностям). Главы V и VI посвящены теории стационарных случайных последовательностей, где стационарность понимается как в узком, так и в широком смысле. Изложение теории стационарных в узком смысле случайных последовательностей ведется с привлечением понятий эргодической теории: сохраняющее меру преобразование, эргодичность, перемешивание. Приводится простое доказательство (данное А. Гарсия) максимальной эргодической теоремы, что позволяет дать и простое доказательство эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина.

Рассмотрение стационарных в широком смысле случайных последовательностей начинается с доказательства спектрального представления для ковариационной функции. Затем вводятся ортогональные стохастические меры, интегралы по ним и доказывается спектральное представление для самих последовательностей. Рассмотрен также ряд статистических задач: оценивание ковариационной функции и спектральной плотности, экстраполяция, интерполяция и фильтрация. В эту же главу включен также материал, относящийся к фильтру Калмана—Бьюси и его обобщениям.

В седьмой главе рассматриваются основные результаты теории мартингалов и родственных понятий. Излагаемый здесь материал стал включаться в традиционные курсы теории вероятностей лишь сравнительно недавно. В последней главе, посвященной марковским цепям, основное внимание уделяется вопросам асимптотического поведения цепей Маркова со счетным множеством состояний.

В конце каждого параграфа приводятся задачи, значимость которых может быть различной: в одних предлагается доказать утверждения, сформулированные, но не доказанные в основном тексте, другие содержат утверждения, используемые в последующем изложении, третьи преследуют цель дать дополнительные сведения к рассматриваемому кругу вопросов и, наконец, некоторые носят характер простых упражнений.

При составлении курса и настоящего пособия автор использовал разнообразную литературу по теории вероятностей. В историко-библиографической справке указываются как источники приводимых результатов, так и дополнительная литература, относящаяся к рассматриваемому материалу.

В книге применяется следующая нумерация и система ссылок. Каждый параграф содержит свою нумерацию теорем, лемм и формул (без указания номера главы и параграфа). При ссылке на соответствующий результат из другого параграфа той же главы применяется двойная нумерация, где первая цифра указывает номер параграфа (так, ссылка на формулу (2.10) означает формулу (10) из § 2). При ссылке на результаты из другой главы используется тройная нумерация (так, формула (II.4.3) означает формулу (3) из § 4 главы II).

Автор пользуется здесь случаем поблагодарить А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохорова, которые его учили и у которых он учился теории вероятностей и советами которых он имел возможность пользоваться. Автор приносит также свою признательность сотрудникам кафедр теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета МГУ и сотрудникам отдела теории вероятностей Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР за обсуждения и советы.

А. Ширяев