Про эту книгу

Профессор Шарп оказал мне большую честь, предложив написать вступление к его прекрасной книге.

В своем предисловии автор задает наивный вопрос: «Почему дифференциальная геометрия состоит в изучении связностей на главных расслоениях?» Конечно, ответ очень прост: потому что евклидова геометрия изучает связности на одном специальном главном расслоении, а все геометрии в некотором смысле являются обобщениями евклидовой.

Действительно, пусть E^n — евклидово пространство размерности n. Назовем ортонормированным репером набор из $n+1$ векторов $x, e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$, где вектор x изображает точку приложения репера, а скалярные произведения векторов e_i равны

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Тогда множество всех ортонормированных реперов является пространством главного расслоения со структурной группой $\mathrm{O}(n)$ и базой E^n, проекция которого имеет вид $(x, e_1, \ldots, e_n) \mapsto x$. Уравнения

$$de_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \omega_{ij} e_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

задают формы Маурера—Картана ω_{ij}, для которых выполняются равенства

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Эти формы удовлетворяют уравнениям Маурера—Картана

$$d\omega_{ij} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Это евклидова геометрия, определенная при помощи подвижных реперов. Формы ω_{ij} определяют параллелизм, или, что то же, связность. Уравнения Маурера—Картана говорят, что эта связность является плоской. Такой подход допускает широкие обобщения.

Развитие дифференциальной геометрии, как и любой науки, происходило причудливым образом. Основным ее понятием является понятие многообразия. Это пространство, координаты в котором определены с точностью до некоторых преобразований и не имеют внутреннего смысла. Понятие многообразия было оригинальным, смелым и очень эффективным. Естественно, потребовалось время, чтобы его усвоить и научиться с ним работать. Например, великий математик Жак Адамар «испытывал непреодолимые трудности..., пытаясь выйти за рамки чисто элементарного и поверхностного знания теории групп Ли», в основе которой лежит понятие многообразия [1]. Точно так же Эйнштейну потребовалось семь лет, чтобы от специальной теории относительности (1908 г.) перейти в 1915 г. к своей общей теории. Столь долгую задержку он объяснил в следующих словах: «Почему для построения общей теории относительности потребовалось еще семь лет? Главная причина состоит в том, что не так легко освободиться от той мысли, что координаты должны иметь непосредственный метрический смысл» [2].

Прорыв в техническом отношении был достигнут благодаря созданию тензорного анализа (исчисления Риччи). При этом центральной темой была риманова геометрия, сформулированная Риманом в 1854 г. Ее основная задача — это следующая «проблема формы»: выяснить, в каком случае две заданные римановы метрики получаются друг из друга заменой координат. Эту проблему решили Кристоффель и Липшиц в 1870 г. Решение Кристоффеля использует ковариантное дифференцирование, которому можно дать изящное геометрическое истолкование с помощью параллелизма Леви-Чивита. Тензорный анализ оказался исключительно эффективным и господствовал в дифференциальной геометрии в течение столетия.

Другим техническим инструментом, который не получил такого признания, какого заслуживает, явилось внешнее дифференциальное исчисление Эли Картана. Оно было создано Картаном в 1922 г. на основе работ Фробениуса и Дарбу. Все внешние дифференциальные формы на многообразии образуют кольцо. Это кольцо зависит только от дифференциальной структуры на многообразии, но не от дополнительных структур, таких как риманова метрика или аффинная связность. В топологии это исчисление приводит к теории де Рама. Менее известна его эффективность при рассмотрении локальных задач.

Одним из фундаментальных вопросов является проблема эквивалентности G-структур. Пусть на n-мерном многообразии с координатами u^i задан набор линейных дифференциальных форм ω^i. Пусть также задан набор форм ω^{*j}, выраженных в координатах u^{*j}, и подгруппа $G \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Требуется найти условия существования таких функций

$$u^{*j} = u^{*j}(u^1, \ldots, u^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

после подстановки которых формы ω^{*j} перейдут в формы, получающиеся из форм ω^j при помощи преобразования из группы G. Проблема форм в римановой геометрии соответствует случаю $G = \mathrm{O}(n)$.

Решение проблемы форм методом эквивалентности Картана автоматически приводит к тензорному анализу. Таким образом, метод эквивалентности обладает большей общностью. В случае $G = \mathrm{O}(n)$ он приводит к параллелизму Леви-Чивита и римановой геометрии. На этом пути евклидова геометрия обобщается до римановой. Для произвольной подгруппы G

проблема эквивалентности не всегда решается просто (см. предисловие), хотя доказано, что решение всегда можно получить за конечное число шагов. Философски говоря, красивые проблемы имеют красивые решения.

Геометрию Клейна можно развить, используя уравнения Маурера—Картана. Обобщая рассмотренную выше ситуацию путем замены группы $\mathrm{O}(n)$ произвольной группой G, получаем обобщенные пространства Картана, а по существу — связности на главных расслоениях.

Фундаментальной проблемой является связь локальной геометрии с глобальными свойствами рассматриваемых пространств. Результатом такого рода является так называемая теорема Черна—Вейля, состоящая в том, что характеристические классы определяются дифференциальными формами, которые можно построить в явном виде исходя из кривизны. Теорема Гаусса—Бонне — простейший результат этой теории.

Я хотел бы воспользоваться случаем, чтобы упомянуть некоторые недавние достижения в геометрии Финслера [3]. Это геометрия очень простого интеграла, которая фигурировала в двадцать третьей проблеме Гильберта из его парижского доклада 1900 г. Благодаря надлежащей интерпретации аналитических результатов, геометрия Финслера сейчас приняла очень простую форму. Стало ясно, что это семейство геометрий, вполне аналогичных римановой.

Дифференциальная геометрия открывает нам вид на многообразия со структурами, как конечномерные, так и бесконечномерные. Имеются также простые и трудные задачи, относящиеся к малым размерностям, разнообразные, как растения в саду. Переключаясь с одной задачи на другую, можно ощутить, что жизнь действительно прекрасна.

Это великое чудо, что исчисление бесконечно малых является источником такой глубины и красоты.

Литература

[1] *Hadamard J.* Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton: Princeton University Press, 1945. P. 115. Имеется русский перевод: *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: МЦНМО. 2001.

[2] *Einstein A.* Autobiographical Notes // Albert Einstein: Philosopher Scientist / 2nd ed. P. A. Schilpp, ed. IL: Evanston, 1949. (The Library of Living Philosophers. V. 7.) P. 67.

[3] *Bao D., Chern S. S.* On a notable connection in Finsler geometry // Houston J. Math. 1993. V. 19. P. 135–180.

С. Черн,
Институт исследований в области математических наук,
Беркли, Калифорния, США