Предисловие редакторов

Спектральные последовательности представляют собой средство решения вычислительных задач ряда разделов математики, в первую очередь алгебраической топологии и алгебраической геометрии. Теория спектральных последовательностей начала формироваться в 40—50-х гг. прошлого столетия, и её возникновение было стимулировано развитием теорий расслоенных пространств и пучков. Особенно бурное развитие аппарата спектральных последовательностей пришлось на 1950—60-е гг., когда к этим теориям было привлечено всеобщее внимание благодаря фундаментальным результатам качественно нового уровня.

Одним из наиболее ранних и эффектных приложений техники спектральных последовательностей было полное вычисление рациональных гомотопических групп сфер (теорема Картана—Серра, послужившая отправной точкой в развитии теории рационального гомотопического типа) и вычисление гомотопических групп методом «убивания» групп меньших размерностей, в частности вычисление Серром большого числа новых стабильных гомотопических групп сфер в середине 1950-х гг. Мощь это новой техники было особенно хорошо видна на фоне широко известных в то время «ювелирных» геометрических методов Л. С. Понтрягина и В. А. Рохлина и композиционных методов Тоды. Вычисление гомотопических групп было лишь частью фронта новых достижений в алгебраической топологии, обязанных спектральной последовательности Лере—Серра как методу вычисления когомологий пространства расслоения по когомологиям его базы и слоя. Другими важными приложениями были результаты о действиях компактных групп Ли на многообразиях, вычисление колец когомологий классифицирующих пространств и однородных многообразий компактных групп Ли. Это завершило программу описания характеристических классов расслоений, начатую Понтрягиным.

Стабильные гомотопические группы сфер и, в первую очередь, задача об инварианте Хопфа привели Адамса в конце 1950-х гг. к его спектральной последовательности на основе предложенной им фильтрации принципиального нового типа. Сам Адамс писал, что переход от метода «убивания» к его спектральной последовательности аналогичен переходу исследований от атомарного уровня к молекулярному. Используя свою спектральную последовательность, Адамс решил проблему инварианта Хопфа. Крупным достижением на основе спектральной последовательности Адамса явился результат Браудера (1960-е гг.) о том, что так называемый Arf-инвариант, представляющий собой другой важнейший инвариант в стабильных гомотопических группах сфер, может быть нетривиален лишь в размерностях вида $2^k - 2$. Arf-инвариант, известный ранее в алгебре как инвариант квадратичных форм над полем $\mathbb{F}_2$, был введён в топологию Понтрягиным при вычислении второй стабильной гомотопической группы сфер. Дальнейшее применение спектральной последовательности Адамса в задачах о стабильных гомотопических группах сталкивалось со значительными техническими трудностями и приводило лишь к частным результатам.

Одновременно с развитием методов вычисления стабильных гомотопических групп началось развитие теории кобордизмов. В своей работе 1954 г. Том обратил метод Понтрягина вычисления гомотопических групп средствами теории гладких многообразий в метод классификации гладких многообразий с точностью до кобордизма на основе вычисления стабильных гомотопических групп пространств Тома — далеко идущего обобщения сфер. В 1960 г. вышла работа С. П. Новикова, в которой было показано, что метод спектральной последовательности Адамса представляет собой весьма эффективное средство вычисления стабильных гомотопических групп пространств Тома. В этой работе были вычислены кольца кобордизмов ориентированных и стабильно комплексных многообразий и получены результаты о кобордизмах других важнейших классов многообразий. Во второй половине 1960-х гг., в период интенсивного развития теории кобордизмов, Новиков вернулся к этой теме и построил спектральную последовательность, соединяющую геометрию теории комплексных кобордизмов с алгебраической техникой спектральной последовательности Адамса. Спектральная последовательность Адамса—Новикова предопределила дальнейшее развитие теории гомотопий на многие годы, и по сей день она является основным методом решения задач, связанных с вычислением стабильных гомотопических групп сфер.

Развитие алгебраической топологии приводило к появлению всё новых спектральных последовательностей. Здесь можно выделить спектральную последовательность коэффициентов (последовательность Бокштейна) как для обычных, так и для обобщённых теорий когомологий. В последнее время важную роль в теории кобордизмов играют спектральные последовательности типа Бокштейна. Спектральная последовательность Милнора вычисляет когомологии пространства X по алгебре Хопфа когомологий его пространства петель. Имеется также спектральная последовательность, вычисляющая алгебру (ко)гомологий пространства петель ΩX по сингулярным (ко)цепям пространства X. Когомологический вариант этой спектральной последовательности, использующий бар-конструкцию, был применён Картаном для вычисления когомологий пространств Эйленберга—Маклейна, а гомологический вариант известен как кобар-конструкция Адамса. Развитие этих спектральных последовательностей привело к спектральной последовательности Эйленберга—Мура, вычисляющей когомологии слоя по сингулярным коцепям пространства расслоения и его базы. Особо следует выделить спектральные последовательности, связанные с обобщёнными теориями когомологий, в первую очередь с K-теорией и комплексными кобордизмами. Среди них, наряду со спектральной последовательностью Адамса—Новикова, наибольшее число применений имеет спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха для вычисления обобщённых когомологий пространства по его обычным когомологиям и кольцу коэффициентов (когомологиям точки) данной теории. В работах В. А. Васильева развиты приложения техники спектральных последовательностей в теории особенностей — к вычислению когомологий дополнений к дискриминантам и, в частности, пространств узлов и зацеплений.

Изучение аппарата спектральных последовательностей привело к дальнейшему развитию методов гомологической алгебры, которые затем находили важные приложения уже за рамками спектральных последовательностей. В связи с этим необходимо выделить спектральные последовательности Адамса и Адамса—Новикова, техника которых оказала существенное влияние на создание методов вычисления когомологий алгебр Хопфа, а также спектральную последовательность Эйленберга—Мура, техника которой нашла широкие применения в торической топологии и через неё в комбинаторике.

Предлагаемая читателю монография Дж. Мак-Клири представляет собой обширное и подробное введение в аппарат и приложения спектральных последовательностей. Читателю желательно владеть основами топологии (в пределах определений и основных свойств гомотопических групп и сингулярных гомологий). В качестве альтернативы предлагаемым автором основным курсам топологии, недоступным на русском языке, мы предлагаем [Новиков02*][1] и [Фоменко—Фукс89*, гл. 1—2]. Большинство топологических работ 1950—60-х гг., сформировавших современный аппарат спектральных последовательностей, собраны в трёх вышедших томах «Библиотеки тополога» [Топо05*], которые мы также рекомендуем читателю для параллельного ознакомления. Описание классической спектральной последовательности Лере—Серра в принципе уже было доступно русскоязычному читателю в ряде изданий (хорошее изложение классического подхода через фильтрации можно найти в [Фоменко—Фукс89*, гл. 3], а подход через точные пары — в [Bott—Tu82]). Однако изложение автора более обширно, современно и содержит ряд новых приложений.

Пожалуй, наиболее важным достоинством данной монографии является подробное и последовательное (в трёх главах) изложение построения и при-

[1] При цитировании литературы из основного списка используется та же система ссылок, что и у автора (например, [Новиков67], [Bott—Tu82] и т. д.). Все названия ссылок из «Литературы, добавленной при переводе» снабжены звёздочкой (например, [Авербух59*], [Баскаков—Бухштабер—Панов04*] и т. д.).

ложений спектральной последовательности Эйленберга—Мура, которая представляет собой весьма важную часть аппарата современной алгебраической топологии, однако до сих пор была недоступна на русском языке.

Обширная глава 10 посвящена спектральной последовательности Адамса. Последовательное изложение этого материала можно также найти в [Фоменко—Фукс89*, гл. 5], однако и здесь изложение Мак-Клири является весьма полезным дополнением. Спектральная последовательность Адамса—Новикова не нашла достаточного отражения в книге. Интересующийся читатель может обратиться к исходной работе [Новиков67], см. также [Топо05*], а также к монографии [Ravenel86], которая содержит большинство результатов о стабильных гомотопических группах, вычисленных методом спектральной последовательности Адамса—Новикова (в настоящее время имеется второе издание монографии Равенела). Оставшиеся главы книги посвящены описанию других спектральных последовательностей. В главу, посвящённую спектральной последовательности Бокштейна, не вошло обсуждение этой спектральной последовательности в теории комплексных кобордизмов — одного из наиболее значимых её применений. Изложение спектральной последовательности Атьи—Хирцебруха носит лишь обзорный характер (достаточно детальное изложение этой спектральной последовательности и её приложений содержится в [Бухштабер69*], [Бухштабер70*]). Безусловно, ряд важных конструкций и приложений спектральных последовательностей не представлены в книге или лишь бегло упомянуты. Мы, однако, не рассматриваем это как недостаток монографии, которая и так получилась весьма большой по объёму, и лишь упомянули часть из этих тем для полноты картины.

В то же время необходимо отметить, что в монографии весьма мало и неадекватно отражены достижения российских/советских и постсоветских топологических школ. В некоторых случаях приведены ссылки лишь на западные источники, а независимые российские/советские работы проигнорированы, хотя в них соответствующие результаты появились несколько раньше. В других случаях автором даётся ссылка лишь на работы западных последователей, что может привести читателя к неверным выводам о происхождении некоторых идей и результатов. Подробные комментарии такого рода помещены нами отдельным списком в конце книги, а в основном тексте присутствуют ссылки на них в соответствующих местах. Дополнительные источники сведены в отдельный список литературы, добавленной при переводе.

Мы надеемся, что предлагаемый перевод монографии Мак-Клири будет полезен широкому кругу читателей, интересующихся алгебраической топологией и её приложениями.

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

Предисловие к русскому изданию

Развитие алгебраической топологии в двадцатом веке — это история глубоких проблем, изучавшихся при помощи тонких алгебраических конструкций, которые привели к плодотворным парадигмам для других областей математики. В середине века Лере, Картан, Кошуль, Серр и Борель ввели и развили аппарат спектральных последовательностей. Вскоре эта алгебраическая техника стала основным вычислительным средством для штурма таких трудных проблем, как вычисление гомотопических групп сфер, обычных и обобщенных когомологий компактных групп Ли и однородных пространств, а также выявление замечательной алгебраической структуры в когомологиях пространств Хопфа; и этот список далеко не полный.

Однако, как известно, спектральные последовательности — сложный объект, поначалу трудный для изучения. Когда моя племянница попросила объяснить ей, что такое спектральная последовательность, я предложил в качестве аналогии книгу. Представьте себе, что результат вычисления, которое вы собираетесь сделать, напечатан в закодированном виде в книге. Вам разрешают посмотреть на первую страницу книги, но чтобы перейти к следующей странице, вы должны разгадать загадку на первой странице. Вы можете видеть часть следующей страницы, но не всю. Если первая страница «хорошая», вы можете её легко перевернуть; возможно, все страницы будут понятны для вас. С другой стороны, в книге может оказаться сколь угодно много страниц, на каждой из которых есть своя загадка. Одна из частей исследования на основе спектральных последовательностей заключается в изящных рассуждениях с целью понять содержание книги, шаг за шагом разгадывая эти загадки. Я надеюсь, что в предлагаемом далее изложении мне удалось донести до читателей некоторые из этих рассуждений и их тонкости.

Интенсивное развитие спектральных последовательностей начиная с 1950-х годов предоставило внушительный материал, из которого можно извлекать истории, рассказываемые в моей книге. Я рассматривал не все достижения в этой области так подробно, как хотелось бы. В частности, вклад советской и постсоветских топологических школ (а также некоторых других) описан очень кратко, а иногда даже не упомянут вовсе. Я очень рад, что этот недостаток исправлен редакторами перевода, Виктором Бухштабером и Тарасом Пановым. Их предисловие существенно дополняет историю развития этих идей и улучшает это издание книги. Я выражаю редакторам перевода и переводчику Виктору Прасолову мою глубокую благодарность.

Джон Мак-Клири, 22 августа 2005

Предисловие ко второму изданию

For I know my transgressions...

Psalm 51

[Ибо беззакония мои я сознаю...

Псалом 50:5]

Первое издание этой книги служило вводным курсом в тайны спектральных последовательностей. С тех пор я узнал кое-что новое, пытаясь применить эти инструменты к алгебраической топологии. Чувство, что я исказил некоторые темы, ввёл читателя в заблуждение и даже записал ошибочные понятия, с годами росло. Когда спрос на первое издание этой книги заканчивался и продавались последние экземпляры, некоторые благородные души побудили меня подготовить второе издание с целью устранить многочисленные найденные ошибки и сделать изложение более современным.

Наиболее заметное изменение по сравнению с первым изданием состоит в добавлении новых глав: гл. 8^{bis} о нетривиальных фундаментальных группах и гл. 10 о спектральной последовательности Бокштейна. Глава 8^{bis} (вставленная после глав с 5 по 8, но имеющая отношение ко всем этим главам) представляется мне естественным местом для обсуждения спектральных последовательностей Картана—Лере и Линдона—Хохшильда—Серра, а также важного класса нильпотентных пространств. Эта глава представляет собой причудливую смесь тем, но я надеюсь, что они хорошо подходят друг к другу и добавляют к предыдущим обсуждениям подробности, которые зависят от фундаментальной группы. Глава 10 подтверждает важную роль, которую играет спектральная последовательность Бокштейна в теории гомотопий, особенно в изучении H-пространств. Она в такой же степени является основным инструментом, как и другие спектральные последовательности из части II.

Менее заметно, что я изменил порядок тем в гл. 2 и 3, чтобы в большей степени сосредоточиться на сходимости в гл. 3, которая включает изложение важной статьи [Boardman99]. Я переставил темы в главе 8, чтобы сделать её более близкой по структуре к гл. 6. Доказательство существования и описание строения спектральной последовательности Лере—Серра тоже существенно изменилось. Я воспользовался изящной статьёй [BrownEH94]. При этом я добавил доказательство мультипликативной структуры, которого не было в первом издании. В гл. 9 теперь приводится обсуждение роли спектральной последовательности Адамса в вычислениях колец кобордизмов.

Во многих местах я несколько усовершенствовал изложение, о чем упоминается в благодарностях. Во всей книге изменены обозначения цитируемой литературы. (О чём я думал при первом издании?) В случае нескольких статей за один год я добавлял к году штрих, чтобы различать статьи. Ещё одно небольшое изменение — знак □ для обозначения конца доказательства (предложенный Мишель Интермон).

Я когда-то думал, что написать книгу легко, и первое издание вылечило меня от этого заблуждения. Теперь я обнаружил, что написание второго издания не легче. Я поблагодарю остальных в конце введения, но здесь я хочу выразить благодарность тем, чья поддержка, добрые слова и упорство сделали возможным завершение второго издания. Прежде всего, это те, кто учил меня применять спектральные последовательности и писать книги: Джим Сташеф, Боб Брунер и Ларри Смит. Каждый из них сделал все, что можно ожидать от друга. Всем им я выражаю глубокую благодарность за их доброту. Пытаясь избежать во втором издании множества мелких ошибок, способных сбить с толку самого прилежного читателя, Хал Садофски организовал целую армию для чтения предпоследней версии большинства глав, что было очень приятно, полезно и великодушно. Хотя я и мог добавить новые опечатки, пытаясь исправить обнаруженные ошибки, я уверен, что книга стала гораздо лучше благодаря усилиям Хала. В Вассаре Диана Винклер уделила мне часть своего ценного времени, чтобы помочь в подготовке библиографии и предметного указателя. Бен Лотто решил мои компьютерные проблемы, а Флора Грабовска выслеживала необходимые мне цитируемые материалы. Большая работа по этому изданию была проделана во время моего годичного отпуска для научной работы в Страсбурге. Я благодарен Кристьену Касселю и Жан-Луи Лодаю за их гостеприимство во время моего пребывания там. Я глубоко благодарен за упорство редактору издательства Cambridge University Press Лорану Каулзу, чьё терпение было чрезвычайным. Наконец, я выражаю благодарность моей семье — Карли, Джону и Энтони — за их терпимость к моим проектам и любовь в течение всей этой истории, которая, казалось, никогда не закончится.

Джон Мак-Клири, 17 июля 2000 г.

Введение

> Ныне вполне ясно, что спектральная последовательность — одна из основных алгебраических структур, полезных для работы с топологическими задачами.
>
> *У. С. Масси*

Топологи обожают свою технику. Как показывает название этой книги, моё намерение — предоставить руководство для использования класса сложных алгебраических приспособлений, известных под названием спектральных последовательностей.

Хорошее руководство для пользователя должно удовлетворять некоторым требованиям. Оно должно давать начинающему достаточно подробное изложение и много примеров, чтобы ему было удобно использовать новый аппарат для своих задач. Руководство должно также содержать достаточно подробное описание внутреннего устройства аппарата, чтобы позволить пользователю определить, что происходит, когда в его работе случаются сбои. Наконец, руководство для пользователя должно включать обильную информацию для знатоков, которые ищут новые способы использования устройства. При написании этой книги я помнил обо всех этих целях.

Эта книга ориентирована на несколько классов читателей. Среди них студенты, изучающие алгебраическую топологию, которые заинтересованы в том, чтобы узнать, как применять спектральные последовательности к вопросам топологии. От такого читателя ожидается, что он знаком с основным курсом топологии на уровне текстов [Massey91] и [May99] по теории сингулярных гомологий, включающим определение гомотопических групп и их основных свойств. Такому начинающему необходимо также познакомиться с основами гомологической алгебры колец и модулей на уровне первых трёх глав книги [Weibel94].

Следующий класс читателей в основном заинтересован в алгебре, и им необходимо изложение основных сведений о спектральных последовательностях, желательно без требования существенных предварительных топологических знаний. Часть I и гл. 12, а также §7.1, §8^{bis}.2 и §9.2 предназначены таким читателям.

Некоторые параграфы книги предназначены для опытных пользователей и затруднили бы изучение для начинающих. Я отметил эти разделы символом Ⓝ (не для начинающих). Как и в других руководствах, эти разделы станут полезными, когда читатель хорошо овладеет спектральными последовательностями и ему потребуются специальные результаты.

Материал этой книги разбит на три части. Часть I называется «Алгебра» и состоит из глав 1, 2 и 3. Цель части I заключается в том, чтобы заложить алгебраический фундамент, на котором будут основаны конструкции и действия во всех последующих примерах. Глава 1 — это свободное введение в манипулирование со спектральной последовательностью в первом квадранте; проблема построения спектральной последовательности остаётся в стороне, но развиваются некоторые формальные алгебраические аспекты этих объектов. В гл. 2 обсуждаются три классических алгебраических источника происхождения спектральных последовательностей (фильтрованные дифференциальные градуированные модули, точные пары и двойные комплексы) вместе с примерами этих идей в гомологической алгебре. Тонкому понятию сходимости посвящена гл. 3. Здесь введены теоремы сравнения и изложена лежащая в их основе теория пределов и копределов.

Часть II называется «Топология»; это сердцевина книги, состоящая из глав с 4 по 10. В этой части обсуждаются четыре классических примера спектральных последовательностей, возникших в теории гомотопий. Введение к каждой из глав содержит подробный обзор её содержания. Здесь мы скажем несколько слов об этих главах. Глава 4 — это краткое описание основ теории гомотопий, которые потребуются для изучения классических спектральных последовательностей. В гл. 5—6 обсуждается спектральная последовательность Лере—Серра, а в гл. 7—8 — спектральная последовательность Эйленберга–Мура. Главы 5 и 7, помеченные римской цифрой I, содержат конструкции каждой спектральной последовательности, исследование их основных свойств и приложения. Главы 6 и 8, помеченные римской цифрой II, посвящены более глубоким структурам этих спектральных последовательностей и применению этих структур к менее элементарным задачам. Альтернативные конструкции этих спектральных последовательностей появляются в гл. 6 и 8. Глава 8^{bis} описывает влияние нетривиальной фундаментальной группы на спектральные последовательности Лере—Серра и Эйленберга—Мура. Изучаются важные темы, включая нильпотентные пространства, гомологии групп и спектральные последовательности Картана—Лере и Линдона—Хохшильда—Серра. В гл. 9 обсуждается классическая спектральная последовательность Адамса (как она строилась до введения понятия спектров). В гл. 10 обсуждается спектральная последовательность Бокштейна, особенно как инструмент для изучения H-пространств. Во всей книге я следовал историческому развитию предмета, чтобы была более понятна мотивировка вводимых понятий и результатов. Однако в некоторых доказательствах из этой книги я отклонился от оригинальных статей и нашёл другие (надеюсь, более прямые) доказательства, в особенности основанные на результатах из части I.

Часть III называется «Восполняя пробелы» и состоит из глав 11 и 12. Моим первоначальным намерением было привести список многими любимых спектральных последовательностей, которые не попали в гл. 4—9.

Это оказалось слишком сложной задачей, поскольку спектральные последовательности стали использоваться во многих областях математики. Я выбрал некоторые из наиболее важных примеров и несколько экзотических, чтобы продемонстрировать широкие приложения спектральных последовательностей. Глава 11 посвящена спектральным последовательностям, применяемым в топологии. Глава 12 включает примеры из коммутативной алгебры, алгебраической геометрии, алгебраической K-теории, анализа и даже математической физики.

В конце каждой главы из частей I и II есть упражнения. В них предлагаются дальнейшие приложения, восстановление пропущенных подробностей и другие точки зрения. Эти упражнения могут быть полезны начинающим.

Список литературы состоит из статей и книг, цитированных в тексте. Потребность в исчерпывающем списке литературы по спектральным последовательностям не является насущной при наличии доступа к MathSciNet или Zentralblatt MATH Database. Эти базы данных позволяют легко находить названия и рецензии для большинства публикаций, написанных после введения спектральных последовательностей.

Как пользоваться этой книгой

Эта инструкция предназначена для начинающих, которые ищут кратчайший путь к некоторым наиболее важным приложениям спектральных последовательностей в теории гомотопий. Следующая программа должна занять наименьшее время, доставить меньше всего головной боли и обеспечить хорошее знание спектральных последовательностей:

1) вся глава 1;
2) § 2.1, § 2.2 (пропустить доказательство теоремы 2.6), § 2.3;
3) § 3.1 и § 3.2;
4) глава 4, когда понадобится;
5) 5.1 и § 5.2;
6) § 6.1, § 6.2 и § 6.3.

Этого достаточно для дальнейшего изучения спектральных последовательностей Бокштейна (гл. 10), Картана—Лере и Линдона—Хохшильда—Серра (§ 8^{bis}.2). Начинающий, заинтересованный в изучении спектральной последовательности Эйленберга—Мура, должен к перечисленному выше добавить § 2.4, а затем переходить к гл. 7, как и намечено. Начинающий, заинтересованный в изучении спектральной последовательности Адамса, тоже должен прочитать § 2.4, а также § 7.1, прежде чем приниматься за гл. 9.

Подробности и благодарности

При подготовке обоих изданий этой книги многие уделяли мне своё время, оказывали поддержку и помогали своей эрудицией, и я им очень обязан. Вместе с выражением благодарностей я немного скажу о происхождении каждой главы.

Этот проект был начат в Филадельфии, когда мы ехали в машине вместе с Брюсом Конрадом, из Джермантауна в университет Темпл. Это должна была быть небольшая брошюра, в которой приводились бы члены E_2 и результаты о сходимости основных спектральных последовательностей, но с тех пор она превратилась в объемистый труд. Вначале были вдохновляющие беседы с Джимом Сташефом, Ли Риддлом и Аланом Копполой. Глава 1 сделана по образцу лекций Джима по алгебраической топологии для студентов старших курсов, которые я прослушал, и неопубликованных записок этих лекций, сделанных Дэвидом Крейнсом. Дэвид Лионс обнаружил в этой главе в первом издании существенное утверждение, содержащее ошибку. Мишель Интермон тщательно вычитала текст для второго издания. Глава 2 классическая по своему содержанию и многим обязана моему чтению классических произведений [CartanH—Eilenberg56], [Eckmann—Hilton66] и [Mac Lane63]. Глава 3 — это моё изложение основополагающей статьи [Boardman99], версию 1981 г. которой я считаю одной из классических работ по алгебраической топологии. Внимательное чтение Аланом Хатчером версии теоремы сравнения Зимана в первом издании привело к некоторым значительным изменениям. Брук Шипли прочитала мою первую версию новой главы 3 и сделала много полезных замечаний. Глава 4 была предложена Ли Риддлом, записки которого по началам теории гомотопий оказались очень полезны для меня.

Глава 5 основана на диссертации [Serre51] — это замечательная статья, и я многое добавил из неё во второе издание. Статья [BrownEH94] составляет основу § 5.3. Особая благодарность Эду Брауну и Дону Дэвису за внимательное вычитывание части этой главы. Глава 6 основана на дальнейшей работе [Serre51, 53], диссертации [Borel53], превосходной статье [Dress67] и последующих исследованиях. Глава 7 основана на Йельской диссертации Смита [SmithL70]. Я многое узнал из статей Ларри Смита и разговоров с ним. Его замечания по ранним версиям гл. 7, 8 и 8^{bis} оказали большое воздействие на окончательные версии этих глав. Джим Сташеф впервые познакомил меня со многими идеями из гл. 7 и 8 и глубоко повлиял на их окончательную редакцию. Я написал эти главы сначала для первого издания, и я считаю, что они несут отпечаток техники Джима.

Основной идеей главы 8^{bis} послужило замечание Серра в списке опечаток для первого издания, который он любезно прислал мне в 1985 г.

Он высказал предложение, чтобы класс нильпотентных пространств был включен в обсуждение спектральных последовательностей. В результате возникла эта глава. Я многое узнал от Эммануэля Дрор-Фарджоуна и Билла Дуайера во время написания этой главы. Часы за чашкой кофе с Ричардом Голдстоуном тоже были полезны. Глава 9 — результат моего чтения статей Адамса и Люлевичуса и превосходной книги [Mosher—Tangora68]. Боб Брунер и Норихико Минами многое добавили к этой главе, когда они читали её раннюю версию. Глава 10 основана на статьях Билла Браудера, Джима Лина и Ричарда Кейна. Набросок гл. 10 появился в качестве введения к моей статье [McCleary87].

Многие высказывали предложения, которые улучшили моё изложение и понимание; среди них Клод Шохе, Билл Масси, Натан Хабеггер, Дан Крайсон, Боб Томасон, Джон Мур, Эндрю Раницки, Франк Адамс, Ян Лери, Алан Дюрфи, Карл-Фридрих Бёдигхаймер, Джоаннес Хюбшман, Ларс Хассельхольт, Джерри Лоддер, Гуидо Мислин и Джейсон Кантарелла.

Армия читателей, организованная Халом Садофски, заслуживает очень большой благодарности за их тщательность и обязательность в усилиях по улучшению книги. Это были Зоран Петрович (гл. 2), Дон Дэвис и Мартин Кроссли (гл. 4), Мартин Чадек и Дан Кристенен (гл. 5), Крис Фрэнч (гл. 6), Джим Сташеф (гл. 7, 8 и 12), Том Хантер и Катрин Хесс (глава 8), Ричард Голдстоун (гл. 8^{bis}), Кристиан Нассау (гл. 9), Этан Беркове и Катрин Леш (гл. 10) и Франк Нойман (гл. 11 и 12).

Моя благодарность Майклу Спиваку за поддержку первого издания и переделывание старых TEX-файлов, чтобы они стали пригодны для нового издания.

Наконец, я хочу выразить благодарность за совместный интеллектуальный вклад математикам, работы которых позволили создать эту книгу, — в частности Жану Лере (1906–1998), Анри Картану, Жан-Луи Кошулю, Жан-Пьеру Серру, Арману Борелю[1], Джону Муру и Франку Адамсу (1930–1989).

[1] Арман Борель (1923–2003). — *Прим. перев.*