

Предисловие

В этой книге предстали материалы курса «Симметрические функции», который авторы в разные годы вели на факультете математики Высшей школы экономики и в Независимом московском университете.

Изначально интерес математиков к симметрическим многочленам возник еще в XVI веке в связи с явными формулами для решения уравнений степени 3 и 4 в радикалах. Основная теорема о симметрических многочленах, утверждающая, что произвольный симметрический многочлен можно выразить через элементарные, была, по-видимому, известна еще Ньютону. В XIX веке в связи с появлением теории Галуа симметрические многочлены становятся одним из ключевых инструментов в алгебре. Интерес к симметрическим многочленам в XX веке и развитие их комбинаторной теории были во многом определены работами Исаяи Шура по теории представлений. Развитое в конце XIX века Германом Шубертом «исчисление условий», обоснованию которого была посвящена 15-я проблема Гильберта, как оказалось, тесно связано с теорией пересечений на грассмановых и флаговых многообразиях — и тут ключевую роль играют те же многочлены, что возникали у Шура как характеры представлений полной линейной группы. Концептуально эти два понятия связывает знаменитая теорема Бореля—Вейля.

Сейчас трудно найти область фундаментальной математики, в которой симметрические многочлены бы не применялись: помимо упомянутых алгебраической геометрии и теории представлений, они появляются и в математической физике, и в топологии, и в теории вероятностей и случайных процессов. Кроме того, с ними связано огромное количество красивых комбинаторных конструкций и проблем, значительная часть которых остаются открытыми и по сей день.

Как следует из названия, курс посвящен теории симметрических функций. В первую очередь нас интересуют комбинаторные аспекты этой теории. Курс рассчитан на студентов-математиков 2–4 курса бакалавриата, хотя среди его слушателей бывали и магистранты, и первокурсники. Для его освоения достаточно владеть стандартными курсами алгебры (линейная алгебра, основы теории групп) и дискретной математики (основы перечислительной комбинаторики, производящие функции).

Хотя материал курса и непосредственно связан с теорией групп и алгебр Ли и их представлений, мы целенаправленно не стали освещать в рамках курса никакие из этих вопросов, поскольку это повысило бы входные требования к участникам — например, потребовало бы знания анализа на многообразиях и начальных сведений из алгебраической геометрии и тео-

рии представлений. Поэтому вопросы многочисленных приложений теории симметрических функций к другим областям математики мы сознательно оставили за кадром, ограничившись комбинаторной теорией, которая сама по себе оказывается весьма непростой и содержательной. А для желающих изучать, скажем, представления алгебраических групп в конечной характеристике, детерминантные процессы или теорию пересечений на сферических многообразиях наш курс в дальнейшем окажется хорошим подспорьем.

Это семестровый курс, состоявший из одной лекции и одного семинара в неделю, продолжительностью в одну «пару» (80 минут). В семестре обычно от 12 до 14 недель. Каждая глава в этой книге приблизительно соответствует одной лекции. В конце каждой главы есть раздел с задачами; эти или похожие задачи предлагались студентам на семинарах, сопровождавших лекции.

Повинуясь принципу, сформулированному классиком — *плюнь в глаза тому, кто скажет, что можно объять необъятное*, — мы побороли желание включить в книгу ряд других чисто комбинаторных сюжетов, которые могли бы быть включены в курс тематически, но не вошли туда по причине ограниченности времени: от многочленов Макдональда до пазлов Кнутсона—Тао. Это отчасти компенсировано тем, что в конце каждой части есть раздел «Дополнительные задачи»; в этом разделе в виде последовательности задач (привычного ученикам математических классов «листка») разбирается некоторый сюжет, не вошедший в основное изложение.

Курс разбит на три больших части. Первая посвящена многочленам Шура: в первых трех главах мы приводим их алгебраическое и комбинаторное определение и доказываем их эквивалентность — откуда, в частности, следует неотрицательность коэффициентов многочленов Шура. Далее на кольце симметрических функций мы строим скалярное произведение (произведение Холла), относительно которого многочлены Шура образуют ортонормированный базис, и доказываем формулу Коши, представляющую сумму произведений многочленов Шура от двух наборов переменных в виде произведения. Наконец, мы вычисляем главную специализацию многочленов Шура и получаем из нее, в частности, формулу Макмагона для числа плоских разбиений.

Вторая часть посвящена доказательству правила Литлвуда—Ричардсона, дающего комбинаторную интерпретацию структурных констант базиса из многочленов Шура в кольце симметрических функций. Для этого мы используем подход, предложенный В. И. Даниловым и Г. А. Кошевым: вводим комбинаторные объекты, называемые массивами. Оказывается, что множество массивов взаимно однозначно соответствует множеству пар полустандартных таблиц одинаковой формы. Из этой теоремы моментально следует формула Коши, доказанная в первой части. Введя на массивах так называемые операции уплотнения, мы получаем одно из самых простых доказательств правила Литлвуда—Ричардсона.

Третья часть посвящена несколько менее классическому сюжету, который, впрочем, в последние двадцать лет пользуется популярностью у специалистов как по комбинаторике, так по алгебраической геометрии: так называемым многочленам Шуберта. Хорошо известно, что многочлены Шура представляют фундаментальные классы многообразий Шуберта в кольце когомологий грассманиана; если заменить грассманиан на многообразие полных флагов, то в его кольце когомологий также будет базис из классов многообразий Шуберта. Их «хорошими» представителями в кольце многообразий и будут многочлены Шуберта.

Мы начинаем с предварительных сведений о симметрической группе и порядке Брюа на ней. Далее, опуская мотивировки из алгебраической геометрии, мы определяем многочлены Шуберта как «частично-симметричные» многочлены, симметричные относительно транспозиций некоторых пар соседних переменных. Это позволяет нам получить исходное их определение, восходящее к работам А. Ласку и М.-П. Шютценберже [25] и И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда и С. И. Гельфанда [1]. В последних двух главах приводится комбинаторная конструкция для многочленов Шуберта, аналогичная конструкции многочленов Шура через полустандартные таблицы Юнга; при этом в роли аналогов таблиц Юнга выступают так называемые пайп-дримы (pipe dreams), конфигурации псевдолиний определенного вида.

Укажем несколько отличий этой книги от других книг по той же тематике на русском и английском языках. В отличие от книг У. Фултона [14], Л. Манивеля [28] и Р. Стенли [7], мы не используем для построения многочленов Шура RSK-соответствие; оно возникает позже, как побочный продукт теории массивов. Вместо этого для доказательства эквивалентности комбинаторного и алгебраического определений многочленов Шура используется лемма Линдстрёма—Гесселя—Вьенно о непересекающихся путях; нам было важно познакомить читателя с этим очень мощным комбинаторным инструментом. Рассматриваемые во второй части массивы, на наш взгляд, незаслуженно мало известны специалистам; единственный известный нам учебный текст, где они рассматривались, — это учебник А. Л. Городенцева [4]. Что же касается многочленов Шуберта, то они в учебной литературе на русском языке до этого почти не появлялись, если не считать их краткого упоминания в цитировавшейся выше книге Фултона. Англоязычная учебная литература о них также немногочисленна, а полностью посвященная им книга И. Макдональда [26] уже стала библиографической редкостью. Использующиеся для их комбинаторного описания диаграммы, которые мы за неимением лучшего русского термина называем «пайп-дримы», в известных нам учебниках появлялись лишь у Манивеля. В последней части мы в основном следуем неопубликованным запискам лекций А. Кнутсона [19].

Читателям, желающим продолжить знакомство с теорией симметрических функций и ее применением в различных областях математики, мы посоветуем несколько книг. Во-первых, это уже упоминавшиеся книги Фул-

тона и Манивеля, в которых рассказывается, как симметрические функции возникают, с одной стороны, в связи с характеристиками представлений полной линейной и симметрической групп, а с другой стороны — в связи с исчислением Шуберта, т. е. теорией пересечений на грассманианах и многообразиях флагов. Читателя, более интересующегося именно комбинаторной стороной дела, а не приложениями, мы отсылаем к главе 7 второго тома уже упоминавшегося классического учебника Р. Стенли «Перечислительная комбинаторика» [7]. К его несомненным достоинствам относится большое количество задач и упражнений, а также весьма объёмный список литературы. Отдельно обратим внимание на принадлежащее С. В. Фомину приложение 1 к этой главе. В нём подробно разобран вывод правила Литлвуда—Ричардсона из эквивалентности Кнута, которую мы лишь слегка затрагиваем в гл. 10. Другое естественное развитие этой теории связано с многочленами Макдональда; здесь читателю можно рекомендовать классическую книгу И. Макдональда [27] (по-русски доступен перевод её первого издания, сделанный А. В. Зелевинским, с многочисленными комментариями и дополнениями переводчика). К сожалению, книга Макдональда написана очень сжато, так что читать ее бывает непросто — это скорее справочник для специалиста, а не учебник для студента-младшекурсника. В заключение упомянем изданную недавно издательством AMS книгу Э. Эгга [11]. Это записки вводного курса о симметрических функциях, во многом аналогичного нашему (однако отличающегося несколько другим выбором тем и подходов). Она очень подробно написана и хорошо подходит для первого знакомства с предметом; при этом в ней затрагивается ряд менее классических сюжетов, например, многочлены Гротендика, хроматические многочлены и пазлы Кнутсона—Тао.

Мы хотели бы поблагодарить всех слушателей курсов «Симметрические функции» на матфаке ВШЭ и в НМУ за их интерес, желание узнавать новое, а также указания на (увы, частые) неточности и ошибки по ходу чтения курсов. Мы признательны Г. А. Мерзону за плодотворные обсуждения и Л. А. Петрову, прочитавшему черновой вариант этого текста и сделавшему ряд ценных замечаний. Наконец, мы благодарны К. Г. Куюмжиян за вдумчивую редактуру русского перевода и многочисленные предложения по улучшению текста.

Во время работы над текстом авторы получали поддержку в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, а также от Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (грант “Junior Leader”).

18 июня 2023 года не стало Валерия Николаевича Тутубалина, замечательного математика, дедушки одного из авторов. Мы посвящаем эту книгу его памяти.

Е. Ю. Смирнов: факультет математики НИУ ВШЭ, Независимый московский университет, Москва; Гуандунский Технион — Израильский технологический университет, Шаньтоу, Китай

А. А. Тутубалина: факультет математики НИУ ВШЭ, Москва