

Предисловие

Перед вами новое издание книги А. И. Галочкина, Ю. В. Нестеренко и А. Б. Шидловского «Введение в теорию чисел». Книга задумывалась как учебное пособие по курсу теории чисел, который преподается на механико-математическом факультете Московского государственного университета в 8 семестре. Ее содержание — применение методов комплексного анализа и алгебры к некоторым задачам теории чисел.

По характеру изложения материала книга занимает промежуточное место между учебниками по элементарной теории чисел и серьезными монографиями. Она может быть использована для чтения специальных курсов и ведения спецсеминаров в университетах и педагогических институтах, а также аспирантами для подготовки к экзаменам. По ней вполне возможно самостоятельно изучать теорию чисел.

Первые два издания выходили под общей редакцией А. Б. Шидловского. По сравнению с предыдущими изданиями материал книги существенно переработан и дополнен. В книге три основных раздела:

- 1) асимптотический закон распределения простых чисел;
- 2) бесконечность множества простых чисел в арифметических прогрессиях;
- 3) приближения действительных чисел рациональными дробями, приближения алгебраических чисел, трансцендентность чисел e и π , значений функции e^z в алгебраических точках и проблема квадратуры круга.

Изложению этих вопросов посвящены соответственно вторая, третья и четвертая главы. В первой главе элементарными методами доказываются некоторые теоремы о простых числах и об их распределении в натуральном ряде. В конце каждой главы приводятся замечания, связанные с содержанием главы, и задачи различной степени трудности.

За основным текстом следуют два дополнения.

В первом излагается доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, отличное от того, что дано в главе 2.

Во втором дополнении приведено решение седьмой проблемы Гильберта о трансцендентных числах.

В список литературы включен ряд книг на русском языке, по которым читатель может продолжить изучать теорию чисел.

Большую помощь при подготовке к печати первого издания книги нам оказали профессора Н. И. Фельдман, А. В. Малышев, В. И. Нечаев.

Введение

Теория чисел является одним из древнейших разделов математики. Она возникла как наука, изучающая свойства натуральных чисел. Понятия натурального числа и арифметических действий над числами являются одними из первых математических абстракций, имеющими важнейшее значение для математики, других наук и всей практической деятельности человечества.

В дальнейшем круг рассматриваемых в теории чисел вопросов значительно расширился. В ней изучаются свойства различных классов чисел: целых, рациональных, алгебраических, трансцендентных. Но и в настоящее время целые числа являются важнейшим объектом исследований.

По основной теореме арифметики каждое натуральное число, начиная с 2, единственным способом представляется в виде произведения простых чисел. Таким образом, простые числа — это те элементы, из которых при помощи умножения строятся натуральные числа. Поэтому одной из важнейших задач теории чисел является изучение свойств простых чисел.

Некоторые результаты о простых числах были получены еще в Древней Греции. В книге Евклида «Начала» (IV—III вв. до н. э.) содержится доказательство бесконечности множества простых чисел. Древнегреческий ученый Эратосфен (276—194 гг. до н. э.) нашел способ составления таблиц простых чисел, названный позднее «решетом Эратосфена». На его идее разработаны некоторые современные методы решения задач, связанных с простыми числами (методы решета).

Ряд важных результатов о простых числах получил Л. Эйлер (1707—1783). В его рассуждениях впервые использовалось тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad s > 1,$$

где произведение распространяется на все простые числа.

Проблемы, связанные с распределением простых чисел в натуральном ряде, обычно являются очень трудными. Многие выдаю-

щиеся математики проявляли к ним большой интерес. Существенный прогресс в исследовании этих проблем был достигнут только в середине XIX в. русским ученым П. Л. Чебышевым (1821—1894). Изучая поведение функции $\pi(x)$ — количества простых чисел, не превосходящих x , он, в частности, с помощью элементарных методов оценил порядок роста этой функции, показав, что при некоторых положительных постоянных a и b для всех $x \geq 2$ выполняются неравенства

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}.$$

В конце XIX в. Ж. Адамар (1865—1963) и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен (1866—1962) доказали асимптотический закон распределения простых чисел, утверждающий, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1.$$

В их доказательствах существенное значение имело изучение свойств дзета-функции Римана — аналитической функции комплексного переменного s , которая при $\Re s > 1$ задается рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

а затем аналитически продолжается в область $\Re s \leq 1$.

Как функцию комплексного переменного эту функцию первым стал рассматривать Б. Риман (1826—1866), обнаруживший глубокую связь ее аналитических свойств с вопросами распределения простых чисел.

В 1837 г. Г. П. Л. Дирихле (1805—1859) доказал, что в любой арифметической прогрессии, разность и первый член которой — взаимно простые числа, содержится бесконечное множество простых чисел. Методы комплексного анализа позволили позднее найти более простое доказательство этой важной теоремы.

К настоящему времени получено много глубоких результатов о простых числах. Однако имеется и целый ряд нерешенных проблем.

В трудах Евклида и особенно Диофанта (III в. н. э.) излагаются методы решения в целых числах некоторых уравнений. Эти труды положили начало большому разделу теории чисел, носящему название «теория диофантовых уравнений».

В теории диофантовых уравнений исследуются вопросы, связанные с решением уравнений в целых числах, в частности вопросы о существовании решений, конечности или бесконечности множе-

ства решений, о числе решений в случае их конечности, о способах нахождения решений.

В теории диофантовых приближений изучаются задачи о решении неравенств в целых, рациональных и алгебраических числах, в частности вопросы о приближении чисел рациональными и алгебраическими числами.

В глубокой древности возникла проблема квадратуры круга — проблема построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого кругу. Первое упоминание о ней содержится в папирусе Ринда, составленном около двух тысяч лет до н.э. Эта проблема оказалась связанной с арифметическими свойствами числа π . Она была решена в отрицательном смысле только в 1882 г. Ф. Линдеманом (1852—1939), который доказал трансцендентность числа π . Этот результат был получен им с помощью аналитического метода, созданного в 1873 г. Ш. Эрмитом (1822—1901) для доказательства трансцендентности числа e .

С давних пор в теории чисел сложилось направление, называемое аддитивной теорией чисел. В этой теории рассматриваются задачи о представлении целых чисел в виде суммы слагаемых определенного вида, например в виде суммы степеней целых чисел, суммы нескольких простых чисел.

Замечательным достижением в теории чисел явилось полученное в 1937 г. И. М. Виноградовым (1891—1983) доказательство теоремы, утверждающей, что каждое достаточно большое нечетное натуральное число представимо в виде суммы трех простых чисел. Это был существенный прорыв в решении так называемой тернарной проблемы Гольдбаха (1742): верно ли, что указанное представление существует для каждого нечетного целого числа $n > 5$? Полное решение этой проблемы было получено в 2014 г. Х. Хельфготтом после серии работ многих математиков, уменьшавших границу, начиная с которой выполняется утверждение Виноградова, а с другой стороны, совершенствовавших компьютерные алгоритмы, позволявшие проверить справедливость гипотезы для всё больших натуральных чисел. Хельфготту удалось усилить аналитические методы и доказать в 2013 г., что гипотезе Гольдбаха о трех простых слагаемых удовлетворяют все нечетные натуральные числа, большие, чем 10^{29} . В следующем году с помощью компьютерных вычислений он проверил эту гипотезу для всех нечетных чисел $n < 10^{30}$. Бинарная проблема Гольдбаха о том, что любое четное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел, остается в настоящее время открытой даже в асимптотическом виде И. М. Виноградова.

Выше отмечены только некоторые разделы теории чисел, в основном связанные с содержанием предлагаемой вниманию читателя книги. Имеются и другие важные направления исследований со своей тематикой и методами.

В теории чисел много задач, которые просто формулируются, но решения которых очень трудны. Некоторые из них не решены до сих пор — например, уже упомянутая бинарная проблема Гольдбаха.

Рассмотрение таблиц показывает, что имеется много пар простых чисел, разность между которыми равна 2 (11 и 13, 41 и 43 и т. д.). Такие числа называются простыми числами-близнецами. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Известно, что числа e , π и e^π трансцендентны. Но неизвестно даже, являются ли числа $e + \pi$ и $e\pi$ иррациональными.

В теории чисел широко используются методы теории функций, алгебры, геометрии, теории вероятностей. Особенно большое значение имеют аналитические методы, основанные на применении теории функций комплексного переменного к задачам теории чисел.

Решение теоретико-числовых задач стимулировало развитие других разделов математики. Например, совершенствование методов, связанных с изучением распределения простых чисел, в значительной мере способствовало развитию теории целых и мероморфных функций. Проблемы теории диофантовых уравнений привели к развитию теории алгебраических чисел и некоторых разделов современной алгебры.

Теория чисел в основном является наукой теоретической. Однако ее результаты и методы успешно применяются в других разделах математики, многих других науках, а также при решении ряда практических задач.

В развитие теории чисел внесли свой вклад такие выдающиеся математики, как П. Ферма (1601—1665), Л. Эйлер, Ж. Лагранж (1736—1813), А. Лежандр (1752—1833), К. Гаусс (1777—1855), Г. П. Л. Дирихле, Б. Риман, Ш. Эрмит, Д. Гильберт (1862—1943).

Большое значение имели работы русских математиков петербургской школы теории чисел, основанной П. Л. Чебышевым: А. Н. Коркина (1837—1908), Е. И. Золотарева (1847—1878), Г. Ф. Вороного (1868—1908), А. А. Маркова (1856—1922).

Замечательные достижения в теории чисел связаны с именами советских математиков. Среди них в первую очередь следует отметить И. М. Виноградова, Ю. В. Линника (1915—1972), А. Я. Хинчина (1894—1959), А. О. Гельфонда (1906—1968).