

ВВЕДЕНИЕ

Предмет изучения теории чисел — числа и их свойства, т. е. числа выступают здесь не как средство или инструмент, а как объект исследования. Натуральный ряд

1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, ...

— множество натуральных чисел — является важнейшей областью исследований, необычайно содержательной, важной и интересной.

Изучение натуральных чисел было начато в Древней Греции. Евклид и Эратосфен открыли свойства делимости чисел, доказали бесконечность множества простых чисел и нашли способы их построения. Задачи, связанные с решением неопределённых уравнений в целых числах, были предметом исследований Диофанта, а также учёных Древней Индии и Древнего Китая, стран Средней Азии.

В XVII в. П. Ферма и в XVIII в. Л. Эйлер внесли огромный вклад в наши знания о натуральных числах. И если Ферма оставил лишь свои открытия, не сопроводив их доказательствами, то Эйлер, оказавший большое влияние на развитие всей математики, а также механики, создал новые методы и приёмы, реализовал идеи, которые играют важную роль и в современных исследованиях и приложениях теории чисел (в частности, учёный предложил использовать средства математического анализа при исследовании проблем теории чисел).

Основные исследования в теории чисел можно условно сгруппировать по нескольким направлениям.

Исследования свойств простых чисел. Среди натуральных чисел выделяются так называемые простые числа, т. е. числа, которые невозможно представить в виде произведения меньших натуральных сомножителей. Множество их бесконечно. Согласно асимптотическому закону распределения простых чисел, их количество в пределах от 1 до заданного числа x асимптотиче-

ски равно $\frac{x}{\ln x}$. Эта теорема была независимо доказана (1896) Ж. Адамаром и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссенем. Вопросы распределения простых чисел в различных числовых последовательностях, например среди значений фиксированного многочлена $f(n)$, составляют одну из проблем этого раздела теории чисел. Для многочленов первой степени она была решена в середине XIX в. Г. П. Леженом Дирихле, однако и в настоящее время не доказана бесконечность множества простых чисел в последовательности $n^2 + 1$, $n \geq 1$. Исследование расстояний между соседними простыми числами в натуральном ряду составляет другой круг проблем этого направления. Среди нерешённых задач отметим, например, утверждение о бесконечности множества пар простых чисел p, q , для которых $p - q = 2$, так называемую «проблему близнецов». Эти вопросы, несмотря на их кажущуюся сугубо теоретическую направленность, представляют большой практический интерес. С изучением свойств простых чисел тесно связаны исследования дзета-функции Римана.

Аддитивные задачи. Здесь рассматриваются вопросы представимости целых чисел в виде сумм слагаемых определённого вида. Например, Ж. Лагранж установил (1770), что каждое натуральное число представимо в виде суммы четырёх квадратов целых чисел. Впоследствии Д. Гильберт обобщил (1909) это утверждение, заменив суммы квадратов суммами произвольных фиксированных степеней, и решил тем самым знаменитую проблему Варинга. И. М. Виноградов доказал (1937), что каждое достаточно большое целое число представимо в виде суммы трёх простых чисел, но так называемая бинарная проблема Гольдбаха о представимости всякого чётного числа $n \geq 6$ в виде суммы двух нечётных простых чисел всё ещё остаётся открытой.

Диофантовы уравнения. Вопросы разрешимости уравнений в целых числах относятся к древнейшим в теории чисел. В связи с исследованиями в этой области уже упоминались имена Диофанта, Ферма и Эйлера. Теория сравнений, являющаяся важным инструментом исследования диофантовых уравнений, была систематически разработана К. Ф. Гауссом. Отметим, в частности, его квадратичный закон взаимности. Теория алгебраических чисел, толчком к созданию которой послужили в первую очередь исследования уравнения Ферма $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$, и в настоя-

щее время приносит плоды в этой области. Отметим полученное П. Михайлеску (2000) решение проблемы Каталана о существовании у уравнения $x^y - z^t = 1$ единственного решения в целых числах $x, y, z, t > 1$, а именно $3^2 - 2^3 = 1$.

Диофантовы приближения. Это раздел теории чисел о решении неравенств в целых числах, включающий теорию цепных дробей и другие алгоритмы построения приближений действительных чисел рациональными, а также ряд вопросов геометрии чисел. Среди наиболее ярких достижений отметим теорему К. Ф. Рота (1954) о том, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными. Среди нерешённых вопросов отметим знаменитую проблему Литтлвуда о том, что для любых действительных чисел α, β и любого положительного ε неравенство

$$x \cdot |x\alpha - y_1| \cdot |x\beta - y_2| < \varepsilon$$

разрешимо в целых числах $x > 0, y_1, y_2$.

Трансцендентные числа. В этом разделе исследуются вопросы иррациональности и трансцендентности действительных чисел. Как правило, это классические постоянные или значения аналитических функций. Неалгебраичность, т. е. трансцендентность, числа e была доказана Ш. Эрмитом (1873), а трансцендентность числа π — Ф. Линдеманом (1882). Предполагается, что любое число вида $P(e, \pi)$, где $P(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, трансцендентно, однако к настоящему времени не доказана даже иррациональность числа $e + \pi$. Нижние оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, доказанные средствами теории трансцендентных чисел (А. Бейкер, 1967), играют важную роль при нахождении решений многих диофантовых уравнений.

Теория чисел — один из древнейших математических разделов. Арифметические исследования послужили базой для создания ряда разделов математики, и в то же время теория чисел использует аналитические, алгебраические, геометрические и многие другие методы для решения теоретико-числовых проблем, ряд из которых ждал и ждёт своего решения столетиями. Для доказательства всё ещё открытой гипотезы Римана о нулях дзета-функции использовались методы, развитые в теории диффе-

ренциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, функциональном анализе. А доказательство асимптотического закона распределения простых чисел впервые было получено методами комплексного анализа. Попытки решения проблемы Ферма, проблем распределения простых чисел стимулировали развитие ряда разделов алгебры.

Теория чисел, безусловно, относится к фундаментальным разделам математики. Вместе с тем ряд её задач имеет самое непосредственное отношение к практической деятельности. Например, благодаря в первую очередь запросам криптографии и широкому распространению компьютеров исследования алгоритмических вопросов теории чисел переживают в настоящее время период бурного и весьма плодотворного развития. Криптографические потребности стимулировали исследования классических задач теории чисел, в ряде случаев привели к их решению, а также стали источником постановки новых фундаментальных проблем.

Традиции исследования проблем теории чисел в России идут, вероятно, от Л. Эйлера (1707–1783), который прожил здесь в общей сложности 30 лет и многое сделал для развития науки. Под влиянием его трудов сложилось творчество П. Л. Чебышёва (1821–1894), выдающегося учёного и талантливого педагога, издавшего вместе с В. Я. Буняковским (1804–1889) арифметические сочинения Эйлера. П. Л. Чебышёв создал петербургскую школу теории чисел, представителями которой являлись А. Н. Коркин (1837–1908), Е. И. Золотарёв (1847–1878) и А. А. Марков (1856–1922). Г. Ф. Вороной (1868–1908), учившийся в Петербурге у А. А. Маркова и Ю. В. Сохоцкого (1842–1927), основал школу теории чисел в Варшаве. Из неё вышел ряд замечательных специалистов по теории чисел, в частности В. Серпинский (1842–1927). Другой воспитанник Петербургского университета Д. А. Граве (1863–1939) многое сделал для преподавания теории чисел и алгебры в Киевском университете. Его учениками были О. Ю. Шмидт (1891–1956), Н. Г. Чеботарёв (1894–1947), Б. Н. Делоне (1890–1980). Теоретико-числовые исследования проводились также в университетах Москвы, Казани, Одессы. В советский период в области теории чисел работали такие выдающиеся учёные, как И. М. Виноградов (1891–1983) (аналитическая теория чисел), А. О. Гельфонд (1906–1968) (трансцендентные числа), Ю. В. Линник (1915–1972) (аналитическая теория чисел), А. Я. Хинчин (1896–1959)

(диофантовы приближения), И. Р. Шафаревич (1923–2017) (алгебраическая теория чисел).

Эта книга, представляющая собой учебник по элементарной теории чисел, включает в основном традиционные темы. Вместе с тем здесь доказаны оценки Чебышёва для количества простых чисел, разложение числа e в непрерывную дробь, трансцендентность чисел e , π и невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки. Большое внимание уделяется также алгоритмическим вопросам теории чисел.