Предисловие

В середине XX века теория аналитических функций комплексного переменного занимала почетное, если не привилегированное, положение в центральном каноне математики. Эта «исключительно богатая и гармоничная теория, — подчеркивал Герман Вейль, — является образцовым достижением классического анализа XIX столетия» [1, с. 526]. Чтобы читатель не воспринял сказанное как деликатное указание на то, что предмет выходит из моды, вспомним, что всего несколькими годами раньше Вейль назвал теорию Неванлинны распределения значений мероморфных функций «одним из немногих великих математических событий нашего века» [2, с. 8]. Ведущие исследователи в областях, от теории функций далеких, словно состязались друг с другом: кто тверже заявит о «непреходящем значении» [3, с. 118] этой теории. Так, Клиффорд Трусделл писал, что «конформные отображения и аналитические функции останутся в нашей культуре, пока она существует» [4, с. 107], а Юджин Вигнер, говоря о «многочисленных красивых теоремах в теории ... степенных рядов и аналитических функций вообще», называл их «наиболее прекрасными достижениями [математического] гения» [5, с. 3]. Стоит ли в свете сказанного удивляться, что теория функций комплексного переменного была основой в программе обучения старшекурсников и аспирантов, необходимой и неотъемлемой частью общей культуры любого математика.

За прошедшие полвека многое изменилось, и не всё — к лучшему. Со своего центрального места в учебных программах комплексный анализ оказался отодвинут в маргинальное положение. В некоторых учебных заведениях сейчас вполне возможно защитить диссертацию по математике, не будучи ознакомленным с основными фактами комплексного анализа; более того, как ни удивительно, даже аспиранты, специализирующиеся в анализе, порой получают ученую степень, пройдя всего лишь семестровый курс теории функций комплексного переменного. И такое происходит, невзирая на то, что комплексный анализ предоставляет аналитику такие совершенно необходимые инструменты, как степенные ряды, аналитическое продолжение и интеграл Коши! Более того, в доказательстве многих важных результатов вещественного анализа используются функции комплексного переменного. Еще в конце XIX века Пенлеве писал: «Кратчайший и легчайший путь между двумя истинами в действительной области пролегает зачастую через комплексные числа» [6, с. 1–2]; в дальнейшем этот тезис подтвердил и популяризировал Адамар в книге [8]. В нашей книжке мы ставим своей целью проиллюстрировать данный тезис, собрав вместе набор математических результатов, формулировки которых к комплексному анализу не относятся, а вот доказательства используют теорию аналитических функций. Самый знаменитый результат такого рода — это, бесспорно, теорема о простых числах; мы продемонстрируем, что есть и много других примеров, причем некоторые из них являются основополагающими результатами.

Для кого же предназначена эта книга? Прежде всего — для всех, кто любит анализ и красивые доказательства. Уровень технической подготовки, необходимый для чтения книги, является довольно скромным. Мы предполагаем знакомство с основными фактами функционального анализа и некоторыми элементарными свойствами преобразования Фурье; весь этот материал содержится, например, в книге: *Lax P. D.* Functional Analysis. Wiley-Interscience, 2002; мы будем на нее ссылаться как на [FA][1]. В тех немногих случаях, когда нам требуется материал, не входящий в стандартные начальные курсы комплексного анализа, мы даем точные формулировки используемых результатов, а в приложениях приводим их доказательства. Тем самым книга должна быть доступна старшекурсникам. Другой возможный контингент читателей — преподаватели комплексного анализа, желающие обогатить свои курсы примерами внешних приложений теории.

Перечислим вкратце, какой материал содержится в книге. Начинаем мы с краткого рассказа о том, как комплексный анализ

[1]Почти все необходимое содержится также в книге: *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. — *Прим. пер.*

помогает быстро и эффективно решить две задачи, представлявшие большой интерес в XVII–XVIII веках: суммирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и связанных с ним и доказательство того, что всякое алгебраическое уравнение с одним неизвестным (и действительными или комплексными коэффициентами) разрешимо в поле комплексных чисел.

Далее мы обсуждаем два типичных приложения комплексного анализа к теории аппроксимации в действительной области: аппроксимация полиномами с весом на прямой и равномерное приближение на единичном отрезке линейными комбинациями функций x^{n_k}, где $n_k \to \infty$ (теорема Мюнца).

Затем мы переходим к приложениям теории функций комплексного переменного к теории операторов и гармоническому анализу — соответствующие главы представляют собой сердцевину книги. Первое приложение к теории операторов — принадлежащее Розенблюму красивое доказательство теоремы Фуглида—Путнама. Затем мы обсуждаем операторы Тёплица и их обращение, принадлежащую Бёрлингу характеризацию подпространств в пространстве Харди H^2, инвариантных относительно одностороннего сдвига (и вытекающую из нее теорию делимости для алгебры $\mathscr{B}$ ограниченных аналитических функций на круге или полуплоскости), а также знаменитую задачу из теории предсказаний (теорема Сегё). Мы также доказываем теорему Рисса—Торина о выпуклости и выводим из нее ограниченность преобразования Гильберта на $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Глава о приложениях к гармоническому анализу начинается с принадлежащего Ньюману поразительного доказательства инъективности преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R})$. Затем мы переходим к обсуждению одного забавного функционального уравнения и вопросам единственности (и неединственности) для преобразования Радона. Затем мы переходим к теореме Пэли—Винера; вкупе с упоминавшейся выше теорией делимости для $\mathscr{B}$ она приводит к простому доказательству теоремы Титчмарша о свертке. Эта глава завершается теоремой Харди, являющейся количественным выражением того факта, что функция и ее преобразование Фурье не могут одновременно стремиться к нулю слишком быстро.

Заключительные главы посвящены теореме Глисона—Кахана—Желязко (в банаховой алгебре с единицей подпространство коразмерности 1, не содержащее обратимых элементов, является максимальным идеалом) и теореме Фату—Жюлиа—Бейкера (множество Жюлиа рациональной функции степени не меньше 2 или нелинейной целой функции есть замыкание множества отталкивающих периодических точек). Наконец, завершается книга на торжественной ноте — доказательством теоремы о простых числах. В заключительном разделе основной части книги, названном нами кодой, мы вкратце обсуждаем два необычных приложения: к аэродинамике (аэродинамические профили, не вызывающие ударных волн, для частично сверхзвукового потока) и к статистической механике (стохастическая эволюция Лёвнера).

Выбор тем в какой-то мере является единственно возможным, но на него не могли не оказать влияния наши исследовательские интересы. Часть материала была взята из книги [FA]; заглавие аналогично заглавию статьи [7] одного из авторов.

Хотя книга была задумана раньше, писалась она весной и летом 2010 года, когда Л. Зальцман находился в творческом отпуске, предоставленном ему университетом Бар-Илан. Кроме того, Л. Зальцман благодарен Институту Куранта, в котором он провел часть этого периода, и отмечает поддержку Израильского научного фонда по гранту 395/07.

Мы рады отметить ценный вклад, внесенный в эту работу многими нашими друзьями и коллегами. Чарльз Хоровиц прочел первую версию текста и сделал много ценных замечаний. Давиду Армитеджу, Вальтеру Бергвайлеру, Александру Ерёменко, Аймо Хинкканену и Тонни О’Фаррелу мы благодарны за полезные замечания и советы, касавшиеся последующих версий. Отдельная благодарность Мириам Беллер за качественную подготовку рукописи.

Питер Д. Лакс, Нью-Йорк
Лоренс Зальцман, Иерусалим

Литература

[1] *Weyl H.* A half-century of mathematics // Amer. Math. Monthly. 1951. V. 58. P. 523–553.

[2] *Weyl H.* Meromorphic Functions and Analytic Curves. Princeton University Press, 1943.

[3] *Kreisel G.* On the kind of data needed for a theory of proofs // Logic Colloquium 76. North Holland, 1977. P. 111–128.

[4] *Truesdell C.* Six Lectures on Modern Natural Philosophy. Springer-Verlag, 1966.

[5] *Wigner E. P.* The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 1–14. [Русский перевод в кн.: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182–198.]

[6] *Painlevé P.* Analyse des travaux scientifiques. Gauthier-Villars, 1900.

[7] *Zalcman L.* Real proofs of complex theorems (and vice versa) // Amer. Math. Monthly. 1974. V. 81. P. 115–137.

[8] *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: МЦНМО, 2001.