ВВЕДЕНИЕ

Мы начнем эту книгу с рассмотрения вопроса о том, как решаются алгебраические уравнения с одним неизвестным от 1-й до 4-й степени. Методы решения алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени были известны еще математикам Древнего мира, методы решения алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени были разработаны лишь в XVI веке.

Общим алгебраическим уравнением с одним неизвестным степени n называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором $a_0 \neq 0$*).

При $n = 1$ получаем линейное уравнение

$$a_0x + a_1 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Это уравнение имеет, очевидно, единственное решение

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

при любых значениях коэффициентов.

При $n = 2$ получаем квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

(вместо a_0, a_1, a_2 мы пишем здесь a, b, c, как принято в школе). Разделив обе части этого уравнения на a и положив $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

После преобразований получаем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \quad \text{и} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{2}$$

*) Коэффициенты a_0, a_1, …, a_n можно пока считать произвольными действительными числами.

В курсе средней школы далее рассматривается только случай $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$. Если же $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то говорят, что равенство (2) не может иметь место и уравнение (1) не имеет действительных корней. Чтобы не возникало таких исключений, нам удобнее будет рассматривать в дальнейшем алгебраические уравнения не в области действительных чисел, а в более широкой области комплексных чисел.

Подробно (вместе с определением) мы будем рассматривать комплексные числа в главе II. Пока читателю достаточно знать или принять на веру следующие утверждения о комплексных числах:

1) множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел, т. е. действительные числа содержатся среди комплексных чисел, так же, как, например, целые числа содержатся среди действительных;

2) комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в натуральную степень, причем все эти операции обладают всеми основными свойствами соответствующих операций для действительных чисел;

3) если z — комплексное число, не равное нулю, и n — натуральное число, то существует ровно n корней n-й степени из z, т. е. n комплексных чисел w таких, что $w^n = z$. При $z = 0$ имеем $\sqrt[n]{0} = 0$. Если w_1 и w_2 — корни 2-й степени из числа z, то $w_2 = -w_1$.

Ниже мы не только будем интересоваться как действительными, так и комплексными корнями уравнений, но и в качестве коэффициентов этих уравнений будем рассматривать произвольные комплексные числа. При этом приведенные выше рассуждения о линейных и квадратных уравнениях останутся в силе, что вытекает из указанного выше свойства 2 комплексных чисел.

Продолжим рассмотрение квадратного уравнения. В области комплексных чисел равенство (2) при любых значениях p и q равносильно равенству

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

где под $\sqrt{p^2/4 - q}$ понимается какое-нибудь одно определенное значение корня второй степени.

Таким образом,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{3}$$

Переходя к a, b, c, получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Для дальнейшего нам понадобятся два факта, относящиеся к уравнениям 2-й степени:

1) теорема Виета*): комплексные числа x_1 и x_2 в том и только в том случае являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, если $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Действительно, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то выполняется равенство (3). Отсюда $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Обратно, если $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то, заменяя p и q в уравнении $x^2 + px + q = 0$ их выражениями через x_1 и x_2, получим $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$, и, следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$;

2) квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ является полным квадратом (т. е.

$$ax^2 + bx + c = [\sqrt{a}(x - x_0)]^2$$

для некоторого комплексного числа x_0) тогда и только тогда, когда корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ совпадают (оба они должны равняться x_0). Это имеет место в том и только в том случае (см. формулу (4)), когда $b^2 - 4ac = 0$. Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 3-й степени

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{5}$$

(Общее уравнение 3-й степени сводится к приведенному делением на a_0.) Сделаем замену $x = y + d$, где d мы выберем позднее. Получим

$$(y + d)^3 + a(y + d)^2 + b(y + d) + c = 0.$$

Раскрыв все скобки и приведя подобные относительно y члены, получим уравнение

$$y^3 + (3d + a)y^2 + (3d^2 + 2ad + b)y + (d^3 + ad^2 + bd + c) = 0.$$

---

*) Франсуа Виет (1540–1603) — французский математик.

Коэффициент при y^2 в этом уравнении равен $3d+a$. Поэтому если мы возьмем $d=-\frac{a}{3}$, то после замены $x=y-\frac{a}{3}$ мы приведем уравнение к виду

$$y^3+py+q=0, \tag{6}$$

где p и q — некоторые многочлены от a, b, c.

Пусть y_0 — корень уравнения (6). Представив его в виде $y_0=\alpha+\beta$ (где α и β пока неизвестны), получим

$$\alpha^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

и

$$\alpha^3+\beta^3+(\alpha+\beta)(3\alpha\beta+p)+q=0. \tag{7}$$

Посмотрим, можно ли на α и β наложить дополнительное условие

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}.$$

В этом случае получим для α и β два уравнения

$$\begin{cases}\alpha+\beta=y_0,\\ \alpha\beta=-\dfrac{p}{3}.\end{cases}$$

По теореме Виета для любого y_0 такие α и β действительно существуют (возможно, комплексные) и являются корнями уравнения

$$w^2-y_0w-\frac{p}{3}=0.$$

Если мы возьмем такие α и β (пока еще неизвестные нам), то уравнение (7) приведется к виду

$$\alpha^3+\beta^3+q=0. \tag{8}$$

Возводя обе части уравнения $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$ в 3-ю степень и объединяя полученное уравнение с (8), будем иметь

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-q,\\ \alpha^3\cdot\beta^3=-\dfrac{p^3}{27},\end{cases}$$

откуда по теореме Виета α^3 и β^3 являются корнями уравнения

$$w^2+qw-\frac{p^3}{27}=0.$$

Таким образом,

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{и} \quad \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

где опять под $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ понимается одно определенное значение корня 2-й степени. Отсюда корни уравнения (6) выражаются формулой

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

причем для каждого из трех значений первого корня 3-й степени*) нужно брать соответствующее значение второго так, чтобы выполнялось условие $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$.

Полученная формула носит название *формулы Кардано***). Подставив в нее вместо p и q их выражения через a, b, c и вычитая $\frac{a}{3}$, получим формулу для корней уравнения (5). Делая затем замену $a = \frac{a_1}{a_0}$, $b = \frac{a_2}{a_0}$, $c = \frac{a_3}{a_0}$, получим формулу для корней общего уравнения 3-й степени.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 4-й степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{9}$$

(Общее уравнение сводится к приведенному делением на a_0.) Сделав замену переменной $x = y - \frac{a}{4}$, подобную замене, сделанной в случае уравнения 3-й степени, приведем уравнение (9) к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{10}$$

где p, q и r — некоторые многочлены от a, b, c, d.

Уравнение (10) будем решать методом, который носит название *метода Феррари****). Преобразуем левую часть уравнения (10) следующим образом:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + qy + \left(r - \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

*) См. указанное выше свойство 3 комплексных чисел.

**) Дж. Кардано (1501–1576) — итальянский математик.

***) Л. Феррари (1522–1565) — итальянский математик, ученик Кардано.

и

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha\left(y^2+\frac{p}{2}\right)+\alpha^2-qy+\frac{p^2}{4}-r\right]=0, \qquad (11)$$

где α — произвольное число. Постараемся теперь подобрать α так, чтобы многочлен 2-й степени относительно y

$$2\alpha y^2-qy+\left(\alpha p+\alpha^2+\frac{p^2}{4}-r\right),$$

стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Как было отмечено выше, для того чтобы он был полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого многочлена равнялся нулю, т. е.

$$q^2-8\alpha\left(\alpha p+\alpha^2+\frac{p^2}{4}-r\right)=0. \qquad (12)$$

Раскрывая скобки, получим для нахождения α уравнение 3-й степени, которое мы умеем решать. Если в качестве α взять один из корней уравнения (12), то выражение, стоящее в квадратных скобках в (11), будет полным квадратом. В этом случае левая часть уравнения (11) является разностью квадратов и поэтому может быть разложена в произведение двух многочленов 2-й степени относительно y. После этого остается решить два получившихся уравнения 2-й степени.

Таким образом, уравнение 4-й степени всегда может быть решено и, более того, можно, аналогично случаю 3-й степени, получить формулу, выражающую корни общего уравнения 4-й степени через коэффициенты уравнения с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

Долгое время математики пытались найти метод решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Однако в 1824 г. норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802–1829) доказал следующую теорему.

Теорема Абеля. *Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.*

Мы сможем доказать эту теорему в конце книги. Однако для этого нам потребуются такие математические понятия, как группа, разрешимая группа, функция комплексного переменного, риманова поверхность и т. д. Со всеми этими и другими математическими понятиями мы и познакомим читателя в дальнейшем на страницах этой книги. Начнем мы с рассмотрения очень важного в математике понятия группы.