Введение

Предлагаемая книга посвящена решению, в сущности, одной задачи — той, которая обозначена в названии. Конкретизация её постановки немедленно приводит к ещё одной задаче, называемой задачей реализации, которую тоже следует считать основной. Кроме того, в процессе решения двух основных задач будут затронуты и некоторые другие, возникающие попутно. О них будет сказано в конце введения и преамбулах соответствующих глав.

Напомню, что два непрерывных отображения $f, g\colon M \to M$ называются *топологически сопряжёнными*, если существует такой гомеоморфизм $h\colon M \to M$, что $h \circ f = g \circ h$. С точным же определением псевдоаносовского гомеоморфизма (GPA-гомеоморфизма) повременю до § 3. Пока скажу только, что это частичное обобщение понятия диффеоморфизма Аносова, и поясню, что имеется в виду.

Во-первых, речь идёт только о гомеоморфизмах поверхностей, тогда как диффеоморфизмы Аносова определены на многообразиях любой размерности, хотя и далеко не на всех, а в двумерном случае они существуют только на торе. «Большая общность» псевдоаносовских гомеоморфизмов состоит в том, что наследуя наиболее важные свойства динамики диффеоморфизмов Аносова, они определены и на других поверхностях. Можно даже сказать, что на всех, но при условии, что речь идёт об *обобщённых* псевдоаносовских гомеоморфизмах (GPA-гомеоморфизмах). В книге задача о топологической сопряжённости рассматривается именно для них[1].

Во-вторых, обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм существенно не является диффеоморфизмом: какую бы дифференцируемую структуру не ввести на поверхности, его гладкость нарушается хотя бы в одной точке[2].

Главное даже не в этом. Упомянутые динамические свойства диффеоморфизма Аносова в значительной степени определяются существованием пары одномерных слоений тора, слои одного из которых, растягиваясь диффеоморфизмом, переходят друг в друга и трансверсальны слоям другого, которые диффеоморфизмом сжимаются. Простые топологические соображения показывают, что на поверхностях, отличных от тора, таких слоений не бывает (что, по существу, и есть препятствие к существованию диффеоморфизмов Аносова). Тем не менее, оказывается возможным постулировать существование для гомеоморфизма сжимающихся и растягивающихся слоений, имеющих конечное число особенностей. Под особой точкой слоения понимается

[1] Я не стал удлинять название книги прилагательным «обобщённый», поскольку даже формально это несущественно: обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм — это, в некотором смысле, то же самое, что псевдоаносовский гомеоморфизм поверхности с конечным числом проколов.

[2] Поскольку в действительности всегда можно добиться гладкости псевдоаносовского гомеоморфизма вне конечного подмножества поверхности, некоторые авторы позволяют себе термин «псевдоаносовский диффеоморфизм».

такая, что разбиение её окрестности на отрезки слоёв хотя и имеет некоторую вполне определённую структуру, но отличается от разбиения плоского прямоугольника на отрезки параллельных прямых, что предполагается определением «обычного» слоения во всех точках поверхности, как, впрочем, и определением слоения с особенностями в окрестностях неособых точек.

Псевдоаносовские гомеоморфизмы были введены [1] в 70-е годы прошлого века У. Тёрстоном [53], причём в связи с задачами, непосредственно принадлежащими не теории динамических систем, а топологии, где проблематика классификации трёхмерных многообразий тесно переплетается с вопросами классификации гомеоморфизмов поверхностей, которыми давно и успешно занимались многие математики. Так, ещё в 1930-е годы глубокие результаты в этой области были получены Я. Нильсеном [48] (см. также [49]). В частности, он выделил три типа классов изотопии сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхностей и описал «канонических» представителей двух из них, а также привёл пример гомеоморфизма, порождающего класс изотопии третьего типа. Интересующее нас достижение Тёрстона как раз состоит в том, что он нашёл недостающих канонических представителей в классах изотопии третьего по Нильсену типа. Тёрстон установил, что в каждом таком классе имеется гомеоморфизм, обладающий свойствами, аналогичными свойствам диффеоморфизмов Аносова в указанном выше смысле, т. е. по существу динамическими свойствами.

Вместе с тем, в те же 1970-е годы идея о необходимости изучения таких гомеоморфизмов назревала и у специалистов по теории динамических систем.

Ещё до открытия Тёрстона Т. О'Брайен и У. Редди [50] доказали факт существования так называемых разделяющих (в англоязычной терминологии *expansive*) гомеоморфизмов поверхностей [2], а после открытия Тёрстона К. Хираде [36] и Дж. Левович [42] установили, что эти гомеоморфизмы суть псевдоаносовские.

Ещё ближе подошли к псевдоаносовским гомеоморфизмам [3] С. Х. Арансон и В. З. Гринес [2]. Исследуя гомеоморфизмы поверхностей с минимальной энтропией в классах изотопии, они привели явную конструкцию гомеоморфизма, оставляющего инвариантными две трансверсальные геодезические ламинации. Отсюда остаётся последний шаг к получению псевдоаносовского гомеоморфизма — это переход к факторотображению при некоторой факторизации поверхности. Отправным пунктом этой конструкции является произвольный гиперболический автоморфизм [4] фундаментальной группы поверхности, т. е. такой, который индуцируется гомеоморфизмом из класса изотопии третьего по Нильсену типа.

Что касается задачи о топологической сопряжённости, то она важна как для топологии трёхмерных многообразий, так и, пожалуй, даже ещё в большей степени, для теории динамических систем, где она является одной из

[1] Эта работа вышла только в 1982 г., но задолго до того она существовала в виде препринта.

[2] Свойство быть разделяющим есть один из признаков хаотичности динамики каскада, порождаемого гомеоморфизмом.

[3] Эта работа вскоре (и, по-видимому, независимо) была повторена Р. Миллером [45].

[4] Термин введён Арансоном и Гринесом.

центральных задач. Для периодических гомеоморфизмов, т. е. канонических представителей классов изотопии первого по Нильсену типа [1)], её решение было получено самим Нильсеном [47], установившим необходимые и достаточные условия сопряжённости, и дополнено К. Иокогамой [54], давшего явную конструкцию построения стандартного представителя каждого класса сопряжённости.

Задача, близкая по духу задаче о классификации с точностью до топологической сопряжённости псевдоаносовских гомеоморфизмов (по сути, она просто та же самая, см. ниже) рассматривалась в 1980-е годы Гринесом с учениками, см. [3, 7, 8]. Речь идёт о классификации диффеоморфизмов, обладающих гиперболическими базисными множествами, в частности — диффеоморфизмов поверхностей с одномерными гиперболическими аттракторами.

Было доказано, что задача топологической сопряжённости таких диффеоморфизмов на областях притяжения их аттракторов редуцируется к некоторой алгебраической задаче. Именно, по диффеоморфизму поверхности и его одномерному гиперболическому аттрактору строится некоторая подповерхность, называемая носителем аттрактора. Ограничение диффеоморфизма на носитель индуцирует автоморфизм его фундаментальной группы [2)], а условие топологической сопряжённости ограничений диффеоморфизмов на аттракторы равносильно сопряжённости соответствующих автоморфизмов фундаментальных групп носителей. В то же время ограничение диффеоморфизма на носитель изотопно единственному псевдоаносовскому гомеоморфизму, а условие сопряжённости этих гомеоморфизмов равносильно тому же самому алгебраическому условию. С другой стороны, хорошо известно, что по псевдоаносовскому гомеоморфизму можно построить вполне определённый диффеоморфизм с одномерным гиперболическим аттрактором, используя обобщение «хирургической операции» [3)], изобретённой С. Смейлом для построения примера диффеоморфизма тора с таким аттрактором (см. [17]).

Несмотря на всё это, едва ли можно считать редукцию задачи классификации аттракторов к указанной алгебраической задаче окончательным решением первой: дело в том, что вторая нисколько не проще. Правда ещё в 1979 г. вышла работа Г. Хемиона [35], в которой было установлено существование конечного алгоритма решения задачи о сопряжённости автоморфизмов фундаментальной группы поверхности, и в качестве доказательства даже была дана версия такого алгоритма. Однако его реализация требует совершенно

[1)] Задача о сопряжённости канонических представителей классов изотопии второго по Нильсену типа в известном смысле сводится к задаче о сопряжённости гомеоморфизмов первого и третьего. Дело в том, что гомеоморфизм второго типа — это так называемый приводимый гомеоморфизм, т. е. допускающий разбиение поверхности на части, ограничение гомеоморфизма на каждую из которых есть либо периодический, либо псевдоаносовский гомеоморфизм.

[2)] В действительности автоморфизм индуцируется, только если диффеоморфизм имеет неподвижную точку в носителе. Если её нет, то некоторый автоморфизм фундаментальной группы всё равно получается, но он определён лишь с точностью до сопряжения посредством внутреннего автоморфизма фундаментальной группы. Подробнее об этом сказано в § 6, а в оставшейся части введения эта тонкость игнорируется.

[3)] Автору доподлинно не известно, чтобы где-то было опубликовано подробное и полностью обоснованное описание этой конструкции.

невероятного по объёму перебора «кандидатов» на сопрягающий автоморфизм. Кроме того, непонятно, как вообще такой перебор можно осуществить.

Занимаясь задачей о топологической сопряжённости аттракторов, я придумал прямой алгоритмический метод её решения, не прибегающий к перебору. Вычисления по нему для не слишком сложных примеров можно провести даже без помощи компьютера (см. § 12). Сначала было опубликовано изложение этого метода, пригодное для аттракторов диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей, причём дополнительно предполагалось, что аттрактор содержит неподвижную точку диффеоморфизма, к тому же такую, что диффеоморфизм сохраняет ориентацию её устойчивого многообразия [11]. В дальнейшем эти ограничения были сняты в [14, 55], где, как и в [11], сами алгоритмы описаны на уровне детализации, достаточном для компьютерной реализации, в то время как доказательства приведены в виде набросков со ссылками на то, что детали восполняются по аналогии с частным случаем [1]. Кроме того, этот метод позволяет построить алгоритм *перечисления* аттракторов, правда уже с использованием перебора, который по имеющимся оценкам оказывается невыполнимо большим. Тем не менее, даже неполный перебор позволил получить много новых примеров аттракторов (и псевдоаносовских гомеоморфизмов), а с их помощью стало возможным ответить на ряд общих вопросов.

С учётом сказанного, можно считать, что в указанных работах решена также задача о топологической сопряжённости псевдоаносовских гомеоморфизмов и их перечислении, хотя может быть это не так уж очевидно.

Эта книжка была задумана как «перевод» результатов указанных выше статей на «псевдоаносовский язык». При этом возникла и необходимость некоторых существенных дополнений, вытекающих из того, что рассматриваемые объекты принадлежат теперь уже не только динамике, но также топологии и алгебре. Похоже, что этот язык более естествен для изложения упомянутых результатов и, надеюсь, предлагаемый текст будет более понятным, чем тексты цитированных статей. Чтобы это было действительно так, я пытался идти от примеров и геометрических конструкций, а не от комбинаторики, как, например, в [14], где противоположный подход продиктован стремлением к максимальной общности и, прежде всего, краткости.

Вернёмся к основной задаче, которая будет рассматриваться в книге. Её конкретная формулировка такова:

Даны два обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизма, требуется узнать, являются они топологически сопряжёнными или нет.

Эта постановка требует уточнения: что значит, что задан обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм? Иными словами, необходимо указать набор данных, который однозначно определяет обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм. Я понимаю это в несколько усиленном смысле, требуя не просто однозначной определённости гомеоморфизма этими данными, но и явной конструкции, позволяющей его по этим данным построить. Поэтому такой

[1] Текст с полными доказательствами составляет диссертацию, защищённую в 1998 г. автором в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

набор данных я называю *кодом* [1] обобщённого псевдоаносовского гомеоморфизма. Рассматривая таким образом код как некий «проект», который может быть составлен более или менее произвольно, разве что с соблюдением некоторых формальных правил, нужно, конечно, сформулировать условия, гарантирующие, что, руководствуясь этим проектом, мы действительно получим требуемое «изделие». Это приводит ко второй основной задаче, называемой *задачей о реализации формального кода.* Её точную формулировку тоже придётся пока отложить, т. к. этому должны предшествовать определения кода обобщённого псевдоаносовского гомеоморфизма и формального кода.

В книге даётся полное алгоритмическое решение этих основных задач в максимальной общности, т. е. для произвольных обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов как ориентируемых, так и неориентируемых поверхностей. Однако я посчитал целесообразным не сразу приступать к рассмотрению самого общего случая, поскольку получающиеся при этом алгоритмы громоздки, а конструкции, на которых они основаны, сложны, и изложение с самого начала было бы чрезмерно отягощено техническими деталями, заслоняющими геометрические идеи. По этой причине представилось естественным повторить решение основных задач на трёх уровнях общности.

Первый (или, если угодно, нулевой) уровень (глава 1) — это случай диффеоморфизмов Аносова двумерного тора. На следующем уровне (глава 4) основные задачи решаются для обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов как ориентируемых, так и неориентируемых поверхностей (включение последних не приводит к существенным усложнениям), обладающих дополнительным свойством: среди слоёв сжимающегося слоения должен быть такой, который переходит сам в себя. Это предположение приводит к заметному упрощению деталей, и поэтому я позволил себе назвать такие обобщённые псевдоаносовские гомеоморфизмы *простыми*. На последнем уровне — в главе 7 — уже нет никаких дополнительных предположений.

Решение указанных задач для диффеоморфизмов Аносова двумерного тора известно: согласно теореме Дж. Фрэнкса каждый такой диффеоморфизм топологически сопряжён гиперболическому автоморфизму тора. Он задаётся некоторой целочисленной матрицей, которую и можно рассматривать как код, а вопрос о реализации здесь тривиален. Задача, таким образом, сводится к алгебраической (а, по существу — арифметической): нужно проверить, сопряжены или нет две целочисленные гиперболические матрицы посредством некоторой целочисленной же матрицы. Алгоритм её решения фактически был дан ещё Гауссом, который, однако, решал немного другую задачу — задачу об эквивалентности целочисленных бинарных квадратичных форм. Нашу задачу можно к ней редуцировать, но я предпочёл просто переформулировать алгоритм Гаусса, что и сделано в § 1, а в § 2 даётся его геометрическая интерпретация.

Дело в том, что сам алгоритм Гаусса обобщения на случай псевдоаносовских гомеоморфизмов не допускает, а вот обобщение его «геометрической

---

[1] Думаю, здесь уместна аналогия, например, с генетическим кодом, по которому, как известно, строится живой организм.

формулировки» из § 2 возможно, и именно оно приводит к решению рассматриваемых задач сначала в частном, а затем и в общем случаях.

Непосредственная работа с обобщёнными псевдоаносовскими гомеоморфизмами начинается в главе 2, где в § 3 даётся их определение и изучаются известные свойства, используемые впоследствии и представляющие самостоятельный интерес. В § 4 приводится пример псевдоаносовского гомеоморфизма. Затем в § 5 вводится в рассмотрение конструкция, на которой основано всё дальнейшее. Она приводит к марковским разбиениям для обобщённого псевдоаносовского гомеоморфизма, обладающим некоторыми дополнительными свойствами, которые облегчают их комбинаторное описание, вводимое далее, а также всю работу с ними. Такие марковские разбиения я называю *ленточными*. Они вводятся для произвольного обобщённого псевдоаносовского гомеоморфизма, но для простого (имеющего инвариантный сжимающийся слой) можно строить ленточные разбиения, устроенные проще тех, которые приходится рассматривать в общем случае. Их я также называю простыми. Заключающий главу § 6 содержит краткую и не претендующую на полноту сводку результатов теории Нильсена—Тёрстона.

В преамбуле главы 3 излагается общий план решения задачи о топологической сопряжённости обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов, а затем в § 7 — «геометрический алгоритм», мотивированный аналогией с геометрической интерпретацией алгоритма Гаусса, рассмотренной в § 2. Он состоит в последовательности перестроек ленточных разбиений, которые позволяют найти все такие разбиения, нужные для построения полного инварианта топологической сопряжённости. После этого остаётся сделать две вещи. Первое — дать описание ленточного разбиения и того, как гомеоморфизм действует на его элементы, посредством конечного набора данных, которые и составляют код. Это делается в § 8. Второе — указать алгоритмы, с помощью которых по коду, выписанному по некоторому ленточному разбиению, можно вычислить коды относительно ленточных разбиений, получаемых из него описанными в § 7 перестройками. Полученное множество кодов, а оно оказывается конечным, и есть искомый полный инвариант топологической сопряжённости обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов. Вторая задача требует немалой подготовительной работы, состоящей в извлечении из кода информации, необходимой для проведения соответствующих вычислений. Я называю это *декодированием*. Оказывается естественным рассмотреть два алгоритма декодирования, называемые алгоритмами **A** и **B**. О том, что конкретно они вычисляют, сказано в преамбуле главы 3. Первый из них вводится в § 9 сперва для случая кодов, определяемых по простым ленточным разбиениям, и сразу вслед за этим для общего случая: он не намного сложнее. А вот второй алгоритм и всё, что с ним связано, в общем случае существенно более громоздок, и именно это приводит к заметному усложнению решения основных задач.

Поэтому начиная с алгоритма **B** решение основных задач для случая простых обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов проводится в отдельной главе 4, а для общего случая оно даётся в заключающей книгу главе 7. Таким образом, читатель, не устрашившийся указанных трудностей, может пропустить первую из этих глав и сразу перейти ко второй. Либо, наоборот, поняв, что в общем случае всё аналогично (хотя, по-моему, это всё же не совсем так), можно ограничиться чтением главы 4 [1]. Вообще для читателя, который не хочет читать всю книгу подряд, быть может, кроме сказанного о её содержании во введении, может быть полезна логическая схема, помещённая в его конце.

Итак, в главе 4 даются решения двух основных задач для простых обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов. Именно, после завершения подготовительной работы — описания второго алгоритма декодирования (алгоритма **B**) в § 10 — в § 11 вводится определение формального кода и устанавливаются необходимые и достаточные условия его реализуемости, т. е. даётся решение второй основной задачи. Эти условия формулируется в терминах выходных данных алгоритма **B**, применённого к рассматриваемому формальному коду. Из доказательства теоремы реализуемости вытекает также необходимое и достаточное условие топологической сопряжённости, состоящее в том, что должны совпадать их коды, определённые по каким-либо ленточным разбиениям. Само по себе это ещё не означает решения первой основной задачи в силу неоднозначной определённости кода обобщённым псевдоаносовским гомеоморфизмом. Полным инвариантом является множество всех кодов, отвечающих ленточным разбиениям некоторого инвариантным образом определяемого типа, и в § 12 даётся алгоритм, вычисляющий все эти коды по одному из них.

По сути всё то же самое делается и в главе 7, с той лишь разницей, что множество ленточных разбиений, по которому строится полный инвариант, в общем случае приходится определять иначе, чем в главе 4. Это можно сделать даже несколькими способами. Я выбрал один из них, преимущество которого видится в универсальности [2], а недостаток состоит в том, что, применяя другие способы, о которых в главе 7 сказано лишь вскользь, иногда можно обойтись меньшим объёмом вычислений.

«Промежуточные» главы 5 и 6 посвящены задачам, о которых в начале введения сказано как о возникающих попутно в связи с основными.

В главе 5 рассматривается алгоритм перечисления обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов и приводятся их примеры, многие из которых получены с помощью его компьютерной реализации. Смысл этого алгоритма состоит в том, что он в принципе позволяет составлять «пополняемый список» кодов, потенциально (т. е. при продолжении вычислений «до бесконечности») содержащий коды всех обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов. Точная постановка задачи перечисления, обоснование её корректности и структура алгоритма приводятся в § 13. Алгоритм опирается на теорему о реализации формального кода, а поскольку она пока доказана только для

[1] Руководствуясь подобными соображениями, можно вовсе не читать главу 1, т. к. решить задачу о топологической сопряжённости диффеоморфизмов Аносова формально можно более общим методом, скажем, из главы 4, правда, это как раз то, о чём говорят: «стрелять из пушки по воробьям».

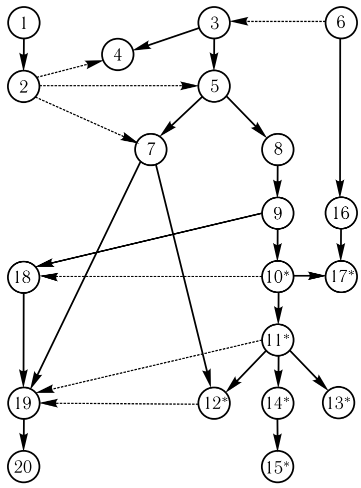
[2] В частности, его можно применить и для простых обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов.

случая простых обобщённых псевдоаносовских гомеоморфизмов, формально в этой главе речь идёт о перечислении только таковых. В общем случае единственное изменение состоит только в замене условий указанной теоремы на условие более общей, которая доказывается в главе 7, но там я уже к этому вопросу не возвращаюсь.

Глава 6 содержит важное дополнение к решению основной задачи о топологической сопряжённости псевдоаносовских гомеоморфизмов. Здесь рассматривается вопрос о том, как её решить в случае, когда они заданы не кодами, а классическим способом, о котором сказано в § 6, — гиперболическими автоморфизмами фундаментальной группы поверхности. В этом случае надо по такому автоморфизму найти какой-нибудь код псевдоаносовского гомеоморфизма, который в силу теории Нильсена—Тёрстона им однозначно (хотя и не явно) определяется. В основе предлагаемого решения этой задачи лежит известный алгоритм М. Бествины и М. Хендела [30], предназначенный для проверки гиперболичности данного автоморфизма фундаментальной группы поверхности. Для того чтобы приспособить этот алгоритм к нашим целям, в главе даются его описание и необходимые сведения об используемой им техники так называемых железнодорожных путей, разработанной Тёрстоном и его последователями для решения различных задач о псевдоаносовских гомеоморфизмах. Следует отметить, что этот материал может рассматриваться лишь как самое первоначальное введение в предмет.

Автор выражает глубокую благодарность научному редактору книги В. З. Гринесу за внимательное прочтение и в высшей степени конструктивную критику.

Логические зависимости между параграфами



Сплошные стрелки означают строгую логическую зависимость, пунктирные — то, что предшествующие параграфы полезны (прежде всего, в порядке мотивировки) для понимания последующих, но, строго говоря, не обязательны. Звёздочками отмечены параграфы, в которых рассматриваются только простые псевдоаносовские гомеоморфизмы.