

Предисловие

Эта книга написана как доступное введение в алгебраическую топологию с достаточно широким охватом этого предмета. Наш подход вполне классический по духу и полностью остаётся в рамках чистой алгебраической топологии. В некотором смысле, такая книга могла бы быть написана 30 или 40 лет назад, поскольку практически весь материал в ней по крайней мере такой давности. Однако прошедшие годы помогли прояснить, какие именно результаты и какая техника наиболее важны. Например, SV -комплексы выдержали проверку временем как наиболее естественный класс пространств для нужд алгебраической топологии, поэтому им здесь уделяется гораздо больше внимания, чем в книгах прежнего поколения. Это внимание показывает также направленность книги скорее на геометрическую, чем на алгебраическую сторону предмета. Геометрия алгебраической топологии столь красива, что было бы жаль пренебречь ей и пропустить все те интуитивные представления, которые она предлагает.

На элементарном уровне алгебраическая топология естественно разделяется на два широких русла — гомотопии и гомологии. В нашей книге материал разделён на четыре главы, приблизительно по возрастанию сложности, причём гомотопии распределены по главам 1 и 4, а гомологии и их зеркальная версия, когомологии, — по главам 2 и 3. Однако эти четыре главы не обязательно читать подряд. Можно начать с гомологий и даже продолжить когомологиями, прежде чем обратиться к гомотопиям. И наоборот, можно отложить гомологии и когомологии вплоть до последних частей главы 4, причём если такую стратегию довести до её естественного предела, то гомологии и когомологии можно ввести просто как разделы теории гомотопий. Такой подход, хотя он и привлекателен с чисто логической точки зрения, предъявляет больше требований к читателю, а поскольку доступность является одним из главных приоритетов этой книги, гомотопическая интерпретация гомологий и когомологий описана уже после того, как эти теории были разработаны независимо от теории гомотопий.

Перед этими четырьмя основными главами идёт предварительная глава 0, в которой вводятся основные геометрические понятия и конструкции, играющие главную роль как в гомотопических, так и в гомологических сторонах предмета. Её можно либо прочитать до остальных глав, либо пропустить и возвращаться к ней за справками по поводу именно тех тем, в которых возникает потребность в последующих главах.

Каждая из четырёх основных глав завершается набором дополнительных тем, которые читатель может выбирать по своему усмотрению, независимо от основного ядра этой книги, содержащегося в предшествующих

частях глав. Многие из этих дополнительных тем в действительности весьма важны в общей структуре алгебраической топологии, хотя они могут и не втиснуться в сжатые по времени рамки вводного курса. В целом эти дополнительные темы составляют почти половину книги, и они включены сюда как для того, чтобы сделать книгу более исчерпывающей, так и для того, чтобы предоставить читателю, который найдёт время в них углубиться, более содержательные образцы истинного богатства и красоты этого предмета.

Не включена в эту книгу важная, но несколько более изощрённая тема — спектральные последовательности. Было очень соблазнительно включить сюда что-нибудь об этом изумительном инструменте, но спектральные последовательности — это столь обширная тема, что представляется более предпочтительным начать ими заниматься в новом томе. Он условно назван «Спектральные последовательности в алгебраической топологии» (*Spectral Sequences in Algebraic Topology*) и в дальнейшем мы ссылаемся на него как на [SSAT]. Готовится также третья книга, о векторных расслоениях, характеристических классах и K -теории, которая будет в основном независима от [SSAT] и от большей части этой книги. На неё мы ссылаемся как на [VBKT], а её предварительное название — «Векторные расслоения и K -теория» (*Vector Bundles and K -Theory*).

Что касается предварительных сведений, в этой книге предполагается, что читатель знаком с содержанием стандартных университетских курсов по алгебре и теоретико-множественной топологии. В частности, читатель должен иметь представление о факторпространствах, которые весьма важны для алгебраической топологии. Это понятие хорошо изложено¹ в учебниках [7] и [40], указанных в списке литературы.

В книгах такого рода, как эта, целью которых является изложение классического материала с весьма классической точки зрения, не место для необузданных увлечений новшествами. Тем не менее, здесь есть одна новая особенность изложения, которая заслуживает упоминания, хотя в книге в целом она играет сравнительно небольшую роль. Это — небольшое расширение классического понятия симплициального комплекса, которое появляется в этой книге под названием Δ -комплекс. Идея состоит в том, чтобы отождествлять различные грани симплекса, так что только внутренности симплексов вложены, и симплексы больше не определяются единственным образом своими вершинами. (С технической точки зрения упорядочение вершин каждого симплекса тоже является частью структуры Δ -комплекса.) Например, если взять стандартную картинку тора как квадрата с отождествлёнными противоположными сторонами и разделить его диагональю на два треугольника, то в результате

¹ См. также О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов «Элементарная топология» (М.: МЦНМО, 2010). — *Прим. ред.*

мы получим структуру Δ -комплекса на торе, имеющую 2 треугольника, 3 ребра и 1 вершину. В противоположность этому, известно, что структура симплициального комплекса на торе должна иметь по крайней мере 14 треугольников, 21 ребро и 7 вершин. Поэтому Δ -комплексы существенно повышают эффективность, что очень приятно с педагогической точки зрения, поскольку это сокращает скучные вычисления в примерах. Более основательная причина для рассмотрения Δ -комплексов заключается в том, что они представляются более естественными объектами с точки зрения алгебраической топологии. Они являются естественной областью определения для симплициальных гомологий, и многие стандартные конструкции дают скорее Δ -комплексы, нежели симплициальные комплексы; например, сингулярный комплекс пространства или классифицирующее пространство дискретной группы или категории. Несмотря на эту естественность, Δ -комплексы явно появлялись в литературе лишь изредка и для них нет ещё стандартного названия.

Эта книга останется доступной в электронном виде и после того, как будет издана традиционным образом. Адрес в Интернет такой:

`pi.math.cornell.edu/~hatcher`

Здесь также можно найти те части двух других книг из этой серии, которые уже готовы. Хотя эта книга и прошла через бесчисленные проверки, включая исправление многих мелких ошибок, как типографских, так и математических, обнаруженных внимательными читателями предыдущих версий, некоторые ошибки неизбежно останутся, поэтому страница в Интернет будет содержать список опечаток в изданной версии. Имея электронную версию, можно не только исправить опечатки, но и сделать более существенные исправления и дополнения. Просьба к читателям присылать замечания и предложения, а также исправления по адресу электронной почты, указанному на моей странице в Интернет.