

Оглавление

Предисловие к серии книг «Математические основы Искусственного Интеллекта» (Д. Н. Чернышенко)	15
Предисловие	17
Глава 1	20
1.1. Линейные отображения и матрицы	20
1.2. Умножение матриц	20
1.3. Ассоциативность умножения матриц	21
1.4. Некоммутативность умножения матриц	22
1.5. Сложение матриц и умножение на число	22
1.6. Умножение блочных матриц	23
1.7. Вычислительный аспект умножения матриц	23
1.8. Хороша ли программа?	24
1.9. Метод Винограда	24
1.10. Метод Штрассена	25
1.11. Рекурсия для $(n \times n)$ -матриц	25
1.12. Применение трехмерных матриц	26
1.13. Параллельная форма алгоритма	27
1.14. Схема сдваивания и параллельное умножение матриц	28
1.15. Матрицы и рекуррентные вычисления	28
1.16. Модели и реальность	29
Глава 2	30
2.1. Система линейных алгебраических уравнений	30
2.2. Линейные комбинации	30
2.3. Арифметические векторы	31
2.4. Арифметическое векторное пространство	31
2.5. Линейная зависимость	32
2.6. Линейная независимость	32
2.7. Транзитивность линейной зависимости	33
2.8. Монотонность числа линейно независимых векторов	33
2.9. Размерность векторного пространства	34
2.10. Базис и размерность	34
2.11. Дополнение до базиса	35
2.12. Существование базиса	35
2.13. Матрицы с линейно независимыми столбцами	36
2.14. Обратимые матрицы	36

2.15. Матрицы с диагональным преобладанием	38
2.16. Матрицы с линейно зависимыми столбцами	38
Глава 3	40
3.1. Билинейные функции	40
3.2. Полилинейные функции	40
3.3. Обнуление и знакопеременность	41
3.4. Перестановка аргументов	41
3.5. Четность подстановки	42
3.6. Транспозиции и циклы	43
3.7. Определитель	44
3.8. Частные случаи	45
3.9. Определитель транспонированной матрицы	46
3.10. Характеристическое свойство определителя	46
3.11. Определитель произведения матриц	47
3.12. Миноры и их алгебраические дополнения	48
3.13. Теорема Лапласа	48
3.14. Присоединенная матрица	49
3.15. Обратимость и невырожденность	50
3.16. Правило Крамера	51
Глава 4	53
4.1. Разделение переменных и ранг	53
4.2. Разложимые матрицы	53
4.3. Скелетное разложение и сжатие информации	54
4.4. Минимальное скелетное разложение	55
4.5. Ранг и миноры	55
4.6. Теорема о базисном миноре	56
4.7. Минимальное число разложимых матриц	58
4.8. Ранги суммы и произведения матриц	58
4.9. Теорема Кронекера—Капелли	59
4.10. Ранг и дефект	59
4.11. Дефект произведения матриц	60
4.12. Элементарные преобразования	61
4.13. Ступенчатые матрицы	63
4.14. Эквивалентные матрицы	64
4.15. LU -разложение и строго регулярные матрицы	65
4.16. Выбор ведущего элемента	67
4.17. Вычисление обратной матрицы	69
Глава 5	72
5.1. Геометрическое пространство и метод координат	72
5.2. Направленные отрезки и свободные векторы	73

5.3.	Аффинные пространства	74
5.4.	Линейные многообразия	75
5.5.	Общие уравнения прямой и плоскости	76
5.6.	Гиперплоскости и полупространства	77
5.7.	Пересечение гиперплоскостей	78
5.8.	Аффинные и выпуклые комбинации	79
5.9.	Теоремы о выпуклых множествах	81
5.10.	Преобразование координат	82
5.11.	Скалярное произведение векторов	83
5.12.	Длины и углы	84
5.13.	Расстояние от точки до гиперплоскости	84
5.14.	Ориентация системы векторов	85
5.15.	Векторное произведение векторов	86
5.16.	Формулы в координатах	87
Глава 6	89
6.1.	Множества и элементы	89
6.2.	Отображения, функции, операторы	90
6.3.	Бинарные операции	90
6.4.	Ассоциативность и скобки	91
6.5.	Группы	92
6.6.	Конечные группы	93
6.7.	Мультипликативные и аддитивные группы	94
6.8.	Подгруппы и смежные классы	95
6.9.	Циклические группы	96
6.10.	Гомоморфизмы и изоморфизмы	97
6.11.	Нормальные подгруппы и факторгруппы	100
6.12.	Сопряженные элементы конечной группы	101
6.13.	Теорема о гомоморфизме	102
6.14.	Отображение Кэли	104
6.15.	Группа обратимых матриц и ее подгруппы	104
6.16.	Конечно порожденные абелевы группы	106
6.17.	Абелевы группы и унимодулярные матрицы	109
Глава 7	112
7.1.	Определение кольца	112
7.2.	Делители нуля и целостные кольца	113
7.3.	Кольцо с единицей	113
7.4.	Определение поля	114
7.5.	Кольцо вычетов	114
7.6.	Обратимые элементы кольца вычетов	115
7.7.	Кольца вычетов в криптографии	117

7.8.	Идеалы и вычеты	117
7.9.	Поле вычетов	120
7.10.	Линейные пространства	121
7.11.	Операции с нулевым вектором	121
7.12.	Линейные комбинации, размерность, базисы	122
7.13.	Изоморфные пространства	123
7.14.	Сумма и пересечение подпространств	124
7.15.	Матрицы над полями и кольцами	126
7.16.	Линейные пространства и расширения полей	127
7.17.	Линейные пространства и алгебры	128
Глава 8	129
8.1.	Определение многочлена	129
8.2.	Сумма и произведение многочленов	130
8.3.	Старшие члены	130
8.4.	Кольцо многочленов	132
8.5.	Значения и корни	133
8.6.	Делимость в целостном унитарном кольце	133
8.7.	Деление с остатком	134
8.8.	Теорема Безу	136
8.9.	Алгоритм Евклида	136
8.10.	Теорема о наибольшем общем делителе	137
8.11.	Факториальность кольца $\mathbb{P}[x]$	138
8.12.	Поле дробей	139
8.13.	Лемма Гаусса	141
8.14.	Факториальность кольца $\mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$	143
8.15.	Определитель Вандермонда	144
8.16.	Формулы Виета и симметрические многочлены	145
8.17.	Результант	147
Глава 9	149
9.1.	Умножение арифметических векторов	149
9.2.	Комплексные числа и комплексная плоскость	151
9.3.	Преобразования комплексной плоскости	152
9.4.	Корни из единицы	154
9.5.	Комплексные многочлены	155
9.6.	Последовательности комплексных чисел	156
9.7.	Непрерывные функции на комплексной плоскости	157
9.8.	Свойства модуля многочлена	158
9.9.	Основная теорема алгебры	159
9.10.	Разложение на линейные множители	160
9.11.	Разложение вещественных многочленов	160

9.12. Кратные корни и производные	161
9.13. Непрерывность корней многочлена	163
9.14. Разностные уравнения с постоянными коэффициентами	164
9.15. Алгебры с делением и теорема Фробениуса	165
9.16. Кватернионы	168
Глава 10	170
10.1. Минимальные расширения	170
10.2. Алгебраические числа и минимальные многочлены	170
10.3. Присоединение корня	171
10.4. Поле алгебраических чисел	172
10.5. Поле разложения	173
10.6. Вычеты в кольце многочленов	174
10.7. Существование поля разложения	175
10.8. Единственность поля разложения	176
10.9. Алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры	177
10.10. Характеристика поля	178
10.11. Полное описание конечных полей	179
10.12. Мультипликативная группа конечного поля	180
10.13. Расширения полей при построениях циркулем и линейкой	181
10.14. Неприводимость многочленов с целыми коэффициентами	183
10.15. Многочлены деления круга	184
10.16. Задача о построении правильных многоугольников	186
10.17. Построение правильного 17-угольника	186
Глава 11	188
11.1. Квадратные уравнения	188
11.2. Кубические уравнения	188
11.3. Уравнения четвертой степени	189
11.4. Общее алгебраическое уравнение	190
11.5. Радикальные расширения	191
11.6. Примитивный элемент	193
11.7. Число автоморфизмов и расширения Галуа	194
11.8. Промежуточные поля и подгруппы	195
11.9. Теория Галуа	197
11.10. Простые радикальные расширения	198
11.11. Полициклический ряд	199
11.12. Разрешимость алгебраических уравнений	201
11.13. Радикальность циклического расширения	202
11.14. Полициклическость и радикальность	203
11.15. Приращение аргумента и непрерывные деформации	204
11.16. Визуализация теоремы Абеля	205

Глава 12	207
12.1. Квадратичная гиперповерхность	207
12.2. Замена переменных и конгруэнтные матрицы	208
12.3. Конгруэнтная диагонализация	208
12.4. Аффинные инварианты	209
12.5. Приведенные уравнения	210
12.6. Параллельные хорды и центры симметрии	211
12.7. Неособые точки и касательные плоскости	213
12.8. Декартовы системы и ортогональные матрицы	214
12.9. Ортоконгруэнтная диагонализация в двумерном случае	215
12.10. Метод вращений	216
12.11. Кривые второго порядка в декартовых координатах	217
12.12. Эллипс	218
12.13. Гипербола	220
12.14. Парабола	222
12.15. Параметризации кривых второго порядка	223
12.16. Поверхности второго порядка в декартовых координатах	225
12.17. Линейчатые поверхности	227
 Глава 13	 229
13.1. Линейные операторы	229
13.2. Ядро и образ линейного оператора	229
13.3. Матрица линейного оператора	231
13.4. Произведение линейных операторов	232
13.5. Единичный оператор и обратимые операторы	233
13.6. Оператор проектирования	234
13.7. Переход к другим базисам	234
13.8. Преобразование подобия и его инварианты	236
13.9. Характеристический многочлен матрицы и оператора	237
13.10. Инвариантные подпространства	238
13.11. Собственные значения и собственные векторы	239
13.12. Треугольная форма матрицы оператора	240
13.13. Теорема Кэли—Гамильтона	241
13.14. Матрица Фробениуса	244
13.15. Коэффициенты характеристического многочлена	245
13.16. Приведение к подобной почти треугольной матрице	247
13.17. Вычисление характеристического многочлена	247
 Глава 14	 249
14.1. Алгебраическая и геометрическая кратность	249
14.2. Операторы простой структуры	250
14.3. Прямая сумма операторов	251

14.4. Нильпотентные и квазискалярные операторы	252
14.5. Расщепление вырожденного оператора	253
14.6. Корневое расщепление	254
14.7. Нерасщепляемые операторы и пространства Крылова	255
14.8. Расщепление нильпотентного оператора	257
14.9. Максимальность и единственность	258
14.10. Общий случай	259
14.11. Жорданова клетка	260
14.12. Жорданова форма и жорданов базис	261
14.13. Вещественные инвариантные подпространства	262
14.14. Блочная жорданова форма вещественной матрицы	262
14.15. Алгоритм построения жорданова базиса	264
14.16. Вычисление жордановой формы	264
14.17. Минимальный многочлен матрицы	266
Глава 15	268
15.1. Метрическое пространство	268
15.2. Пределы и полнота	268
15.3. Пополнение пространства	269
15.4. Множества в метрическом пространстве	270
15.5. Теорема Вейерштрасса в метрическом пространстве	271
15.6. Нормированное пространство	272
15.7. Выпуклые функции	273
15.8. Неравенства Гёльдера и Минковского	275
15.9. Нормы Гёльдера	276
15.10. Зачем нужны нормы?	276
15.11. Эквивалентные нормы	278
15.12. Компактность замкнутых ограниченных множеств	280
15.13. Наилучшие приближения	280
15.14. Компактность единичной сферы	282
15.15. Геометрические свойства единичных шаров	283
15.16. Топологические пространства	284
15.17. Топологически компактные множества	285
Глава 16	287
16.1. Евклидово пространство	287
16.2. Унитарное пространство	287
16.3. Длина вектора	288
16.4. Тожество параллелограмма	289
16.5. Ортогональность векторов и множеств	292
16.6. Ортогональные системы и процесс ортогонализации	294
16.7. Унитарные и ортогональные матрицы	295

16.8. Перпендикуляр и проекция	297
16.9. Матрица Грама	298
16.10. Положительно определенные матрицы	299
16.11. Общий вид скалярного произведения	299
16.12. Биортогональные системы	300
16.13. Наилучшие приближения на выпуклых множествах	301
16.14. Разделяющие и опорные гиперплоскости	302
16.15. Метод Качмажа	303
16.16. Потеря ортогональности при вычислениях	305
Глава 17	307
17.1. Непрерывность и ограниченность линейного оператора	307
17.2. Операторная норма	307
17.3. Матричная норма	308
17.4. Норма Фробениуса	309
17.5. Спектральный радиус и круги Гершгорина	310
17.6. Ряд Неймана	313
17.7. Сохранение норм	314
17.8. Унитарно инвариантные нормы	315
17.9. Сингулярное разложение матрицы	316
17.10. Число обусловленности матрицы	319
17.11. Возмущения собственных значений и векторов	320
17.12. Линейные функционалы	323
17.13. Сопряженное пространство	323
17.14. Линейные функционалы и гиперплоскости	324
17.15. Линейные функционалы и скалярные произведения	325
17.16. Продолжение линейных функционалов	326
17.17. Дуальные нормы	327
Глава 18	330
18.1. Нормальные матрицы	330
18.2. Унитарные и эрмитовы матрицы	331
18.3. Эрмитово разложение	332
18.4. Определенность комплексной матрицы	333
18.5. Квадратный корень	334
18.6. Полярное разложение	335
18.7. Блочно-диагональная форма	336
18.8. Сопряженный оператор	337
18.9. Нормальные операторы	338
18.10. Эрмитовы и унитарные операторы	338
18.11. Сингулярное разложение линейного оператора	340
18.12. Три формы записи сингулярного разложения	341

18.13. Альтернатива Фредгольма	342
18.14. Малоранговые приближения	343
18.15. Псевдорешения и псевдообратная матрица	345
18.16. Метод регуляризации	346
18.17. Метод сопряженных градиентов	349
Глава 19	355
19.1. Спектральная теория эрмитовых матриц	355
19.2. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность	355
19.3. Закон инерции	357
19.4. Метод Лагранжа	358
19.5. Критерий Сильвестра	358
19.6. Соотношения разделения	359
19.7. Теорема Куранта—Фишера	360
19.8. Вариационный вывод соотношений разделения	363
19.9. Метод секулярного уравнения	364
19.10. Критерий неотрицательной определенности	365
19.11. Ортогональные многочлены	366
19.12. Соотношения разделения при эрмитовом возмущении	368
19.13. Соотношения разделения для сингулярных чисел	369
19.14. Малоранговые приближения в норме Фробениуса	370
19.15. Теорема Лидского и нормы Фань Цзы	371
19.16. Возмущения собственных значений	373
Глава 20	374
20.1. Линейные неравенства	374
20.2. Размерность выпуклого множества	375
20.3. Внутренние точки выпуклых множеств	376
20.4. Угловые точки выпуклых множеств	378
20.5. Полиэдры и выпуклые многогранники	378
20.6. Грани полиэдра и их размерности	380
20.7. Конечно порожденный конус	382
20.8. Вершины полиэдра и ребра ассоциированного конуса	385
20.9. Общее решение системы неравенств	386
20.10. Лемма Фаркаша и неоднородные неравенства	387
20.11. Оптимизация линейных функционалов на полиэдре	388
20.12. Двойственные задачи	389
20.13. Симплекс-метод	391
20.14. Спектральный радиус неотрицательной матрицы	397
20.15. Теоремы Перрона и Фробениуса	399
20.16. Двоякостochasticкие матрицы и мажоризация	402
20.17. Расстояние между спектрами нормальных матриц	405

Глава 21	407
21.1. Семейства матриц и представления	407
21.2. Вполне приводимые представления	408
21.3. Матричные алгебры	409
21.4. Полнота неприводимой матричной алгебры	410
21.5. Треугольный вид коммутативной алгебры	411
21.6. Нильпотентные алгебры	413
21.7. Блочнo-треугольный вид нильпотентной алгебры	414
21.8. Аннулятор коммутативной нильпотентной алгебры	415
21.9. Базис коммутативной нильпотентной алгебры	416
21.10. Максимальные коммутативные алгебры	417
21.11. Циркулянтные матрицы	418
21.12. Быстрое преобразование Фурье	421
21.13. Прямая сумма алгебр	423
21.14. Блочные матрицы и кронекерово произведение	425
21.15. Тензорное произведение линейных пространств	427
21.16. Тензоры	428
21.17. Неприводимость кронекерово произведения	430
 Глава 22	 432
22.1. Многомерные матрицы и тензорные разложения	432
22.2. Изменение формы тензора	432
22.3. Сечения трехмерного тензора	434
22.4. Двуслойные тензоры	435
22.5. Трехслойные тензоры	436
22.6. Минимальность	437
22.7. Единственность	438
22.8. Теорема Крускала	440
22.9. Граничный ранг	444
22.10. Минимальное разложение Таккера	445
22.11. Сингулярное разложение Таккера	447
22.12. Тензорный поезд	448
22.13. Редукция рангов тензорного поезда	451
22.14. Тензор умножения матриц	454
22.15. Симметрии тензора умножения матриц	455
22.16. Вывод быстрого алгоритма	457
22.17. Нижняя оценка сложности	459
 Литература	 462
 Предметный указатель	 465
 Об авторе	 481