Предисловие редакторов перевода

Судьбы оригинального издания этой книги и ее русского перевода складывались по-разному.

Оригинальное издание «Спинорной геометрии» Герберта Блейна Лоусона и Мари-Луизы Микельсон вышло в издательстве Принстонского университета в 1989 г., т. е. примерно через двадцать лет после публикации серии статей Майкла Атьи и Изадора Зингера, посвященных ныне знаменитой теореме об индексе эллиптических операторов на компактных многообразиях. На протяжении этих лет теорема Атьи—Зингера находилась в центре внимания всей математической общественности. Поэтому вряд ли можно считать случайностью то, что у авторов настоящей книги возникла мысль об издании монографии, представляющей эту теорему в форме, доступной для математиков широкого профиля. Такая книга, в частности, должна была содержать весь предварительный материал, необходимый для понимания основной темы.

«Спинорная геометрия» Лоусона и Микельсон вполне удовлетворяет этому условию. Первые две главы книги представляют собой одно из лучших на сегодняшний день введений в спинорную геометрию и теорию операторов Дирака. Эти главы, безусловно, станут подарком для всех, кто интересуется данным разделом дифференциальной геометрии, уже давно заслуживающим включения в основные университетские курсы.

Центральной является третья глава, в которой излагается теорема Атьи—Зингера об индексе. Читатель найдет здесь не только разнообразные формулировки знаменитой теоремы, уже давно вошедшей в золотой фонд современной математики, но и ее многочисленные применения в геометрии и топологии.

Наличие большого числа приложений теоремы об индексе и вообще спинорной геометрии — отличительная черта монографии Лоусона и Микельсон. Помимо четвертой главы, целиком посвященной указанным приложениям, книга содержит большое число отступлений, разбросанных по всему тексту.

Среди дополнений особо отметим одно, которое посвящено Spin^c-геометрии. Думаем, что если бы авторы писали свою книгу сейчас, они непременно включили бы данную тему в основной текст, поскольку этот раздел спинорной геометрии продемонстрировал в последние годы свою несомненную полезность в четырехмерной гладкой топологии, в особенности при изучении уравнений Зайберга—Виттена.

Возвращаясь к судьбе русского перевода «Спинорной геометрии», отметим, что значение теоремы об индексе было по достоинству оценено нашим математическим сообществом. Все статьи Атьи и Зингера, в которых излагалась эта теорема, были немедленно переведены и опубликованы в журнале «Успехи математических наук». Однако с переводом книги Лоусона и Микельсон дело обстояло иначе. Интерес к ней возник сразу после появления оригинальной версии, но, к сожалению, первые попытки публикации русского варианта «Спинорной геометрии» пришлись на тяжелые годы перестройки. Несмотря на то что был начат ее перевод, осуществить издание книги в условиях финансовых трудностей оказалось невозможно.

К счастью, сама идея публикации «Спинорной геометрии» на русском языке не была предана забвению, хотя реализовать ее удалось только сейчас. Несмотря на такое большое запаздывание, книга не утратила своего значения. Представленное в ней изложение теоремы Атьи—Зингера остается до сих пор одним из наиболее доступных, а интерес к спинорной геометрии постоянно увеличивается по мере того, как возрастает ее значение как общематематической дисциплины.

Что касается приложений, представленных в «Спинорной геометрии», то их стало только больше за прошедшие годы, а некоторые из поставленных здесь вопросов уже получили свое решение. Со времени публикации книги Лоусона и Микельсон в дифференциальной геометрии произошли революционные изменения. В первую очередь это относится к замечательным работам Григория Перельмана по гипотезам Пуанкаре и Тёрстона, обогатившим эту математическую дисциплину новым арсеналом средств из теории уравнений с частными производными. Однако данная тема заслуживает отдельной монографии, не уступающей по охвату и доступности книге Лоусона и Микельсон. Такое издание, будем надеяться, появится в ближайшие годы, в том числе и на русском языке.

С. Н. Малыгин и А. Г. Сергеев

Посвящается
Кристи, Диди, Мишель и Хезер

Предисловие

В конце 1920-х годов неослабевающая поступь идей и открытий привела физику к общепринятой теории электрона. Однако физик Дирак был неудовлетворен широко распространенными представлениями и, находясь отчасти в изоляции, искал лучшую формулировку. К 1928 году он преуспел в нахождении такой теории, которая согласовывалась как с его идеями, так и с устоявшимися принципами того времени. В конечном счете эта теория оказалась одним из великих достижений мысли той эпохи. Особенно удивительной выглядела внутренняя красота ее математической структуры, которая не только прояснила многие дотоле таинственные явления, но также однозначно предсказала существование похожей на электрон частицы отрицательной энергии. Впоследствии такие частицы были действительно найдены, и это изменило наше понимание природы.

Возможно, неудивительно, что благодаря своей неотразимой красоте и важности для физики идеи, лежащие в основе теории Дирака, оказались чрезвычайно важны и в современной математике, особенно во взаимосвязи с топологией, геометрией и анализом. Большая часть этих новых подходов, возникших в математике, обязана своим происхождением трудам Атьи и Зингера[1]. Именно они и их следствия находятся в фокусе внимания настоящей книги.

Остановимся кратко на некоторых основных идеях. В поисках своей теории Дирак столкнулся с задачей нахождения волнового уравнения $D\psi = \lambda\pi$, инвариантного относительно преобразований Лоренца и совместимого с уравнением Клейна—Гордона $\Box\psi = \lambda\psi$, где

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2.$$

Из соображений причинности следует, что оператор D должен иметь первый порядок относительно временно́й координаты x_0. Поскольку в силу инвариантности относительно преобразований Лоренца нет никакой предпочтительной временно́й координаты, оператор D должен иметь первый порядок по всем переменным. Таким образом, Дирак по существу искал дифференциальный оператор первого порядка, квадрат которого был бы равен лапласиану. Его идея состояла в том, чтобы вместо комплекснозначной волновой функции ψ рассмотреть набор $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ из n таких функций. Тогда оператор D превращается в систему операторов первого порядка, имеющих вид

$$D = \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

[1] В другой транскрипции — Сингер. — *Прим. ред.*

где $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$ — квадратные матрицы порядка n. Условие

$$D^2 = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \ddots & \\ & & \square \end{pmatrix}$$

приводит к уравнениям

$$\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = \pm 2\delta_{\nu\mu}.$$

Для малых n эти уравнения легко решаются в явном виде, что позволяет изучить их более детально.

Описанная конструкция Дирака имеет одно любопытное и фундаментальное свойство. Преобразования Лоренца пространственно-временны́х переменных $(x_0, \ldots, x_3)$ индуцируют линейные преобразования наборов Ψ, определенных лишь с точностью до знака. Для того чтобы согласованно выбрать эти знаки, необходимо перейти от группы Лоренца L к ее нетривиальному двулистному накрытию $\widetilde{L}$. Иначе говоря, рассматривая преобразования наборов Ψ, мы приходим к представлениям группы $\widetilde{L}$, не спускающимся на L.

Теория Дирака обладает еще одной интересной особенностью. В присутствии электромагнитного поля гамильтониан Дирака содержит дополнительный член по сравнению с тем, что можно было ожидать исходя из классического случая. Имеется формальная аналогия между этим дополнительным членом и дополнительным членом, возникающим в механических уравнениях движущейся частицы при введении в них собственного вращения (спина). Спин, или собственный магнитный момент, обладает наблюдаемыми квантовыми эффектами. По этой причине наборы Ψ называются *спинорами*, а семейство их преобразований — *спинорным представлением*.

Данная физическая теория затрагивает одно важное и общее свойство ортогональных групп (здесь мы ограничиваемся положительно определенным случаем). В теории Картана и Вейля представления алгебры Ли группы SO_n по существу порождаются двумя основными. Первое из них — стандартное n-мерное представление (и его внешние степени). Второе строится из представлений алгебры, порожденной упомянутыми выше матрицами γ_μ (т. е. *алгебры Клиффорда*, ассоциированной с квадратичной формой, определяющей ортогональную группу). Это второе представление и называется спинорным. Оно не происходит из какого бы то ни было представления ортогональной группы, а возникает только как представление ее универсальной накрывающей, обозначаемой символом Spin_n. Это представление играет ключевую роль в поразительном множестве разнообразных задач в геометрии и топологии, таких как векторные поля на сферах, погружения многообразий, целочисленность некоторых характеристических чисел, тройственность в размерности восемь, существование комплексных структур, существование метрик положительной скалярной кривизны и — возможно, самое важное — индекс эллиптических операторов.

В начале 1960-х годов общее развитие математики привело к задаче нахождения топологической формулы для индекса произвольного эллиптического оператора, определенного на компактном многообразии. Такая формула должна была обобщить важную теорему Римана—Роха—Хирцебруха, установленную в комплексно-алгебраическом случае. При рассмотрении этой задачи Атья и Зингер обратили внимание на то, что среди всех многообразий наиболее многообещающие свойства имеют те, для которых SO_n-структура возникает из Spin_n-структуры. Выяснив, что для таких многообразий проходит конструкция Дирака, они построили некоторый глобально определенный эллиптический оператор, канонически ассоциированный с римановой метрикой на многообразии. Индекс этого оператора оказался одним из основных топологических инвариантов, называемым $\hat{A}$-родом, для которого ранее была установлена его целочисленность в специальном классе спинорных многообразий. (В общем случае $\hat{A}$-род не является целым числом.) Рассмотрение операторов дираковского типа с коэффициентами в произвольных расслоениях привело с некоторыми усилиями к общей формуле для индекса произвольного эллиптического оператора.

Атья и Зингер пришли к осознанию общего понятия индекса в более адекватном контексте K-теории. В частности, это привело их к построению некоторых KO-инвариантов, имеющих глубокие применения в геометрии и топологии. Упомянутые инварианты были затем использованы для исследования вопросов, не поддававшихся анализу другими средствами. Их изучение и прояснение были главной мотивировкой для написания настоящей книги.

Обратим внимание на то, что в совсем недавние годы появилась еще одна глубокая и красивая физическая теория, идеи которой проникли в самую суть топологии, геометрии и анализа. Речь идет о теории неабелевых калибровочных полей Янга и Миллса, которая через работы Дональдсона и М. Фридмана привела к удивительным результатам в размерности четыре. Теорию Янга—Миллса можно с полным правом считать весьма нетривиальным обобщением теории Дирака, затрагивающим три фундаментальные силы: слабое, сильное и электромагнитное взаимодействия. Эта теория самым существенным образом использует современную дифференциальную геометрию. Важную роль в ней играют теория связностей, операторы дираковского типа и теория индекса. Мы надеемся, что настоящая книга послужит скромным введением в некоторые из этих понятий.

Г. Б. Лоусон и М.-Л. Микельсон

Стони Брук

Благодарности

Эта книга во многом обязана фундаментальным работам Атьи и Зингера. Отчасти нашей первоначальной мотивировкой для ее написания было дать неспешное и усовершенствованное изложение их результатов.

Авторы хотят выразить свою особую признательность Питеру Ландвеберу, Жан-Пьеру Бургиньону, Мише Кацу, Чэнь Хайваню и Питеру Войту, каждый из которых прочитал большую долю первоначальной рукописи и дал много важных советов. Мы также признательны Национальному научному фонду (National Science Foundation) и Бразильскому национальному совету по научному и технологическому развитию (Brazilian C. N. Pq.) за их поддержку во время написания настоящей книги.

Г. Б. Лоусон и М.-Л. Микельсон

Я бы хотела воспользоваться возможностью выразить свою глубокую признательность Марку Маховальду, протянувшему свою руку, когда это было так нужно.

М.-Л. Микельсон