ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе средней школы подробно изучаются алгебраические уравнения с одним неизвестным 1-й степени (линейные) и 2-й степени (квадратные). При этом оказывается, что для решения таких уравнений существуют общие формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. А существуют ли подобные формулы для решения алгебраических уравнений более высоких степеней, знают очень немногие. Оказывается, что для уравнений 3-й и 4-й степени такие формулы тоже существуют. Методы решения этих уравнений мы рассмотрим во введении. Если же рассмотреть общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й, то оказывается, что оно не разрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни такого уравнения через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Это и есть теорема Абеля.

Одна из целей данной книги — показать читателю доказательство теоремы Абеля. Но до этого читателю придется познакомиться с двумя очень важными разделами современной математики — теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Читатель узнает, что такое (в математике) группа, поле и какими свойствами они обладают. Узнает, что такое комплексные числа и почему именно так, а не иначе они определяются. Узнает, что такое риманова поверхность и в чем состоит «основная теорема алгебры комплексных чисел».

Ознакомившись с этой книгой, читатель легко сможет изучить и результаты, полученные французским математиком Эваристом Галуа, который нашел условие, при котором корни *конкретного* алгебраического уравнения можно выразить через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Для этого можно рекомендовать книги М. М. Постникова «Теория Галуа», Б. Л. Ван дер Вардена «Алгебра» и А. Г. Хованского «Топологическая теория Галуа»*).

Автор будет сопровождать читателя на этом пути, но даст ему широкую возможность испытать свои собственные силы. Для этого читателю будет предложено большое число задач. Задачи расположены непосредственно в основном тексте книги и являются фактически его составной частью. Задачи имеют сплошную нумерацию, которая выделена полужирным шрифтом. Если какие-то задачи окажутся читателю не под силу, то ему на помощь придут «Указания, решения и ответы».

Книга содержит много понятий, возможно, новых для читателя. Чтобы читатель мог легче в них ориентироваться, в конце книги приведен алфавитный список понятий с указанием страниц, на которых эти понятия определяются.

Вариант доказательства теоремы Абеля, представленный в этой книге, разработан академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом. В 1963-64 годах он, тогда еще молодой доктор наук, проводил занятия по высшей математике для учащихся 10 класса в только что открытой Московской физико-математической школе-интернате № 18 при МГУ им. М. В. Ломоносова. В качестве темы занятий он выбрал разработанный им топологический вариант доказательства теоремы Абеля и все, что необходимо для этого доказательства. Одним из учеников этого класса был автор данной книги.

В 1970-71 годах я, будучи аспирантом МГУ, уже сам преподавал в этой же школе и организовал математический кружок, на занятиях которого школьники постепенно, решая задачи, осваивали все понятия и доказывали утверждения, необходимые для достижения конечной цели — доказательства теоремы Абеля. По материалам лекций В. И. Арнольда и работы этого кружка и написана данная книга. Автор благодарен В. И. Арнольду, высказавшему ряд ценных замечаний при подготовке рукописи этой книги.

В. Б. Алексеев

---

*) *Постников М. М.* Теория Галуа. Физматгиз, 1963. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979. (СПб.: Лань, 2004). *Хованский А. Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: МЦНМО, 2008.